រៀបរៀងដោយ លឹម ផល្គុន និង សែន ពិសិដ្ឋ
បរិញ្ញាបត្រផ្នែកគណិតវិទ្យា

ប្រជុំរូបមន្តគណិតវិទ្យា

សម្រាប់ថ្នាក់ទី ១២ ១០ ១១

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$\sqrt{a^2} = |a|$ $e^{i\theta}$ $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ $\mathbb{Z}$ β

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

$\frac{dy}{dx}$ $\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$

$i^2 = -1$ $\sqrt{2}$ $\frac{1}{\sin^2\phi} = 1 + \cot^2\phi$

∞ μ π $e = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

$z = a + i.b$

ស្របតាមកម្មវិធីសិក្សាថ្មី

គណៈកម្មការនិពន្ធ និង រៀបរៀង

លោក លឹម ផល្គុន

លោក សែន ពិសិដ្ឋ

គណៈកម្មការត្រួតពិនិត្យបច្ចេកទេស

លោក លឹម ឆុន　　　　លោក អ៊ឹង សំណាង

លោកស្រី ទុយ វីណា　　　　លោក ទិត្យ ម៉េង

លោក នន់ សុខណា　　　　លោក ព្រឹម សុនិត្យ

គណៈកម្មការត្រួតពិនិត្យអក្ខរាវិរុទ្ធ

លោក លឹម មិត្តសិរ

ការិយកុំព្យូទ័រ

លោក អ៊ឹង សំណាង

កញ្ញា លី គុណ្ណាកា

រចនាជំព័រ និង ក្រាប

លោក ព្រំ ម៉ាឡា

មាតិកា

ជំពូកទី០១ តក្កវិទ្យា

១_សំណើ

និយមន័យ

_ សំណើ គឺជាអំណះអំណាងទាំងឡាយណាដែលគេអាចសម្រេចថាពិត ឬក៏ មិនពិត ។

_ គេតាងឈ្មោះនៃសំណើដោយអក្សរ **p , q , r , s ,....** ។

_ បើ **p** ជាសំណើពិតនោះ **p** មានតម្លៃភាពពិតស្មើនឹង **1** គឺ $ត.(\mathbf{p})=\mathbf{1}$

_ បើ **p** ជាសំណើមិនពិតនោះ **p** មានតម្លៃភាពពិតស្មើនឹង **0** គឺ $ត.(\mathbf{p})=\mathbf{0}$

២_ឈ្នាប់តក្កវិទ្យា

ក.ឈ្នាប់និង $(\wedge)$

_ គេកំនត់សរសេរ $\mathbf{p\wedge q}$ អានថា **p** និង **q**

_ សំណើ $\mathbf{p\wedge q}$ ពិតតែក្នុងករណីសំណើ **p** និង **q** ពិត

ខ.ឈ្នាប់ឬ $(\vee)$

_ គេកំនត់សរសេរ $\mathbf{p\vee q}$ អានថា **p** ឬ **q**

_ សំណើ $\mathbf{p\forall q}$ មិនពិតតែក្នុងករណីសំណើ **p** និង **q** មិនពិតទាំងពីរ

គ.ឈ្នាប់មិន ($\overline{}$)

- គេកំនត់សរសេរ $\overline{\mathbf{p}}$ អានថា មិន **p**

- សំណើ **p** និង សំណើ $\overline{\mathbf{p}}$ មានតម្លៃភាពពិតខុសគ្នា ។

ឃ.ឈ្នាប់នាំឱ្យ $(\Rightarrow)$

- គេកំនត់សរសេរ $\mathbf{p \Rightarrow q}$ អានថា **p** នាំឲ្យ **q**

- សំណើ $\mathbf{p \Rightarrow q}$ មិនពិតតែក្នុងករណីសំណើ **p** ពិត និង **q** មិនពិត ក្រៅពីនេះវាជាសំណើពិត ។

✍ **p** ជាលក្ខខណ្ឌគ្រប់គ្រាន់ដើម្បីឲ្យ **q** ។

✍ **q** ជាលក្ខខណ្ឌចាំបាច់ដើម្បីឲ្យ **p** ។

ង.ឈ្នាប់សមមូល $(\Leftrightarrow)$

- គេកំនត់សរសេរ $\mathbf{p \Leftrightarrow q}$ អានថា **p** សមមូល **q**

- សំណើ $\mathbf{p \Leftrightarrow q}$ ពិតតែក្នុងករណីដែលសំណើ **p** និងសំណើ **q** មានតម្លៃភាពពិតដូចគ្នា ។

✍ **p** ជាលក្ខខណ្ឌចាំបាច់ និងគ្រប់គ្រាន់ដើម្បីឲ្យ **q** ។

- ជាទូទៅ $\mathbf{p \Leftrightarrow q = (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)}$

៣_ប្រភេទនៃសម្រាយបញ្ជាក់

ក. សម្រាយបញ្ជាក់ដោយផ្ទាល់

ប្រភេទនៃសម្រាយបញ្ជាក់នេះគឺជាការស្រាយបញ្ជាក់ត្រង់ៗទៅតាមអ្វីដែលគេចង់បាន ។

ខ. សម្រាយបញ្ជាក់តាមសំណើផ្ទុយពីសម្ពតិកម្ម

របៀបដោះស្រាយ

ឧបមាថា គេចង់បង្ហាញសំណើ $\mathbf{p \Rightarrow q}$ ពិត

- ជំហ៊ានទី១ ត្រូវកំនត់សំណើ $\mathbf{p}$ និង សំណើ $\mathbf{q}$ ឲ្យបានត្រឹមត្រូវ។
- ជំហ៊ានទី២ ត្រូវកំនត់សំណើ $\bar{\mathbf{p}}$ និងសំណើ $\bar{\mathbf{q}}$ ។
- ជំហ៊ានទី៣ គេផ្តើមពី $\bar{\mathbf{q}}$ បញ្ជាក់រហូតគេបានសំណើ $\bar{\mathbf{p}}$ ដែលជាសំណើផ្ទុយពីសម្មតិកម្ម គឺមានន័យថាគេបានបង្ហាញថា $\bar{\mathbf{q}} \Rightarrow \bar{\mathbf{p}}$ពិត ដូចនេះគេបានសំណើ $\mathbf{p \Rightarrow q}$ ពិត ។

គ. សម្រាយបញ្ជាក់ផ្ទុយពីការពិត

របៀបដោះស្រាយ

- ជំហ៊ានទី១ តាង $\mathbf{p}$ ជាសំណើដែលត្រូវបង្ហាញ ។
- ជំហ៊ានទី២ ត្រូវកំនត់សំណើ $\bar{\mathbf{p}}$ ។
- ជំហ៊ានទី៣ ឧបមាថាសំណើ $\bar{\mathbf{p}}$ ពិត រួចបកស្រាយបន្តបន្ទាប់រហូត

ដល់បានលទ្ធផលផ្ទុយពីទ្រឹស្តីគណិតវិទ្យា ។

គេបានសំណើ $\bar{p}$ មិនពិត ។

ដូចនេះសំណើ p ពិត (ព្រោះតម្លៃភាពពិតរវាងសំណើ p និង $\bar{p}$ មានតម្លៃផ្ទុយគ្នា) ។

ឃ. សម្រាយបញ្ជាក់តាមទ្វេលក្ខខណ្ឌ

របៀបដោះស្រាយ

- ជំហ៊ានទី១ បង្ហាញលក្ខខណ្ឌចាំបាច់ $p \Rightarrow q$
- ជំហ៊ានទី២ បង្ហាញលក្ខខណ្ឌគ្រប់គ្រាន់ $q \Rightarrow p$

ង. សម្រាយបញ្ជាក់តាមឧទាហរណ៍ផ្ទុយ

វិធីនេះតម្រូវឲ្យគេរកឧទាហរណ៍មួយមកបញ្ជាក់ថាសំណើដែលត្រូវបង្ហាញជាសំណើមិនពិត ។

ជំពូកទី០២

សំណុំ

✍ សំណុំ គឺជាបណ្តុំនៃវត្ថុ ដែលកំនត់ដោយលក្ខខណ្ឌជាក់លាក់ ។

✍ ចំនួនធាតុនៃសំណុំ **A** តាងដោយ $\mathbf{n(A)}$ ។

✍ សំណុំទទេ គឺជាសំណុំដែលគ្មានធាតុសោះ ហើយតាងដោយ ϕ ។

✍ ការកំនត់សំណុំមានពីររបៀប ៖ កំនត់តាមការរៀបរាប់ឈ្មោះធាតុ និង កំនត់តាមលក្ខណះរួមនៃធាតុ ។

✍ សំណុំរាប់អស់ជាសំណុំដែលមានចំនួនធាតុជាចំនួនកំនត់ ។ សំណុំអនន្តជាសំណុំដែលមានចំនួនធាតុច្រើនរាប់មិនអស់ ។

✍ សំណុំស្មើគ្នាកាលណាសំណុំទាំងពីរមានបញ្ជីឈ្មោះធាតុដូចគ្នា ។

✍ **A** ជាសំណុំរងនៃ **B** លុះត្រាតែគ្រប់ $\mathbf{x \in A}$ នោះ $\mathbf{x \in B}$

✍ បើ **A** ជាសំណុំរងនៃ **B** នោះ $\mathbf{n(A) \le n(B)}$ ។

✍ បើ **A** ជាសំណុំរងផ្ទាល់នៃ **B** នោះ $\mathbf{n(A) < n(B)}$ ។

✍ សំណុំសកលគឺជាសំណុំដែលមានគ្រប់ធាតុដែលគេបានជ្រើសរើសយកមកសិក្សា ។

✍ សំណុំរងបំពេញ $\mathbf{\overline{A} = \{ x / x \in A , x \in U \}}$

✍ សំណុំប្រសព្វ $\mathbf{A \cap B = \{ x \in A}$ និង $\mathbf{x \in B \}}$

✍ សំណុំប្រជុំ $A \cup B = \{ x \in A \quad ឬ \quad x \in B \}$

✍ សំណុំ A និង B ជាសំណុំដាច់គ្នាលុះត្រាតែ $A \cap B = \phi$ ។

✍ ចំពោះគ្រប់សំណុំ A និងសំណុំសកល U គេបាន ៖

$A \cap \overline{A} = \phi \;,\; A \cup \overline{A} = U$ ។

✍ បើ A និង B ជាសំណុំរាប់អស់នោះគេបានរូបមន្ត ៖

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

✍ លក្ខណៈ **DeMogan** ៖

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \quad ; \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

✍ លក្ខណៈផ្តុំ

$$1/ \quad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

$$2/ \quad A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

✍ លក្ខណៈបំបែក

$$1/ \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

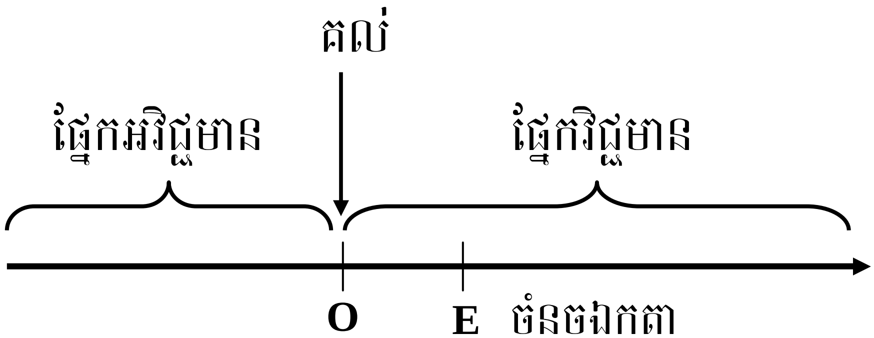
$$2/ \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

ជំពូកទី០៣

ចំនួន ពហុធា ប្រព័ន្ធរាប់

១. ចំនួន

✍ បន្ទាត់ចំនួន



✍ លក្ខណៈនៃតម្លៃដាច់ខាត

. $|a| = a$ បើ $a \geq 0$

. $|a| = -a$ បើ $a < 0$

✍ សំណុំចំនួនគត់ធម្មជាតិ $IN = \{ 1 , 2 , 3 , ... \}$

✍ សំណុំចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីហ្វ $Z = \{ ... , -2 , -1 , 0 , 1 , 2 , ... \}$

✍ ចំនួនសនិទានមានទម្រង់ $\dfrac{m}{n}$ ដែល m និង n ជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប

✍ សំណុំចំនួនសនិទានតាងដោយ Q

✍ គ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន $\mathbf{a}$ និង $\mathbf{b}$ គេបាន $\mathbf{a < b \Leftrightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}}$

✍ ចំពោះ $\mathbf{a > b}$ និង $\mathbf{b > 0}$ គេបាន ៖

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\,.\sqrt{b} \quad , \quad \sqrt{a^2} = (\sqrt{a}\,)^2$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

✍ ទម្រង់ពន្លាតនៃប្រព័ន្ធរបាប់គោល $\mathbf{10}$ មានរាង

$$\mathbf{abcd_{10} = a \times 10^3 + b \times 10^2 + c \times 10 + d}$$

✍ ទម្រង់ពន្លាតនៃប្រព័ន្ធរបាប់គោល $\mathbf{2}$ មានរាង

$$\mathbf{abcd_{2} = a \times 2^3 + b \times 2^2 + c \times 2 + d}$$

២. ឯកធា និង ពហុធា

✍ ឯកធាគឺជាកន្សោមដែលប្រមាណវិធីលើអថេរមានតែវិធីគុណ និង ស្វ័យគុណដែលមាននិទស្សន្តគត់វិជ្ជមាន ឬ សូន្យ ។

✍ ឯកធាដូចគ្នា គឺជាឯកធាដែលមានផ្នែកអថេរដូចគ្នា ។

✍ ដឺក្រេនៃឯកធា ជាផលបូកនិទស្សន្តរបស់អថេរនីមួយៗនៃឯកធា ។

✍ ពហុធា ជាផលបូកនៃច្រើនឯកធាខុសៗគ្នា ។

✍ ដឺក្រេនៃពហុធា គឺជាដឺក្រេរបស់តួដែលមានដឺក្រេខ្ពស់ជាងគេ ។

៣. ប្រមាណវិធីលើ ពហុធា

✍ ដើម្បីបូក ឬ ដកពីរពហុធា គេត្រូវបូក ឬ ដកឯកធាដែលដូចគ្នា ។

✍ ដើម្បីគុណពហុធា និង ពហុធាគេយកតួនីមួយៗនៃពហុធាទីមួយគុណ គ្រប់តួនៃពហុធាទីពីរ រួចធ្វើប្រមាណវិធី ។

៤. រូបមន្ត

១. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

២. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

៣. $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

៤. $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$

៥. $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

៦. $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

៧. $(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 - b^3$

៨. $(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 + b^3$

៩. $acx^2 + (ad+bc)x + bd = (ax+b)(cx+d)$

៥. ប្រមាណវិធីចែកពហុធា

✍ ឧបមាថាគេមានកន្សោមពីរ **A** និង **B** ដែលមានអថេរដូចគ្នា ហើយមានដឺក្រេរៀងគ្នា **m** និង **n** ។ បើ $m \ge n$ គេអាចរកកន្សោម

ពីជគណិតពីរ Q និង R ដែល $A = B\times Q + R$ ។

ដឺក្រេនៃ R តូចជាងដឺក្រេនៃ B ។ Q ជាផលចែក ហើយ R ជា

សំណល់នៃក្នុងវិធីចែក ។ ផលចែក Q មានដឺក្រេ $m-n$ ។

✍ បើ $R = 0$ គេបាន $A = B\times Q$ នោះគេថា A ចែកដាច់នឹង B

៦. តួចែករួមធំបំផុត និង ពហុគុណរួមតូចបំផុត

✍ តួចែករួមធំបំផុតនៃកន្សោម A និង B គឺជាផលគុណកត្តារួមដែល មាននិទស្សន្តតូចជាងគេ ។

✍ ពហុគុណរួមតូចបំផុត គឺជាផលគុណគ្រប់កត្តារួមដែលមាននិទស្សន្ត ធំជាងគេ ។

៧. វិធាន

✍ ដើម្បីគណនាតួចែករួមធំបំផុត ៖

១_ដាក់ជផលគុណកត្តា គ្រប់តួទាំងអស់

២_ជ្រើសរើសយកតែកត្តារួមដែលមាននិទស្សន្តតូចជាងគេ។

៣_តួចែករួមធំបំផុត ជាផលគុណនៃកត្តារួមទាំងនោះ ។

✍ ដើម្បីគណនាតួចែករួមតូចបំផុត ៖

១_ដាក់ជផលគុណកត្តា គ្រប់តួទាំងអស់

២_ជ្រើសរើសយកតែកត្តាមិនរួម និង កត្តារួមដែលមាននិទស្សន

ធំជាងគេ។

៣_ពហុគុណរួមតូចបំផុត ជាផលគុណនៃកត្តាទាំងនោះ ។

៨. ប្រមាណវិធីបូក ឬ ដកកន្សោមប្រភាគ

$$\frac{A}{C}+\frac{B}{C}=\frac{A+B}{C} \quad \text{និង} \quad \frac{A}{C}-\frac{B}{C}=\frac{A-B}{C}$$

ដែល $C \neq 0$ ។

៩. វិធាន

✍ ដើម្បីធ្វើ វិធីបូក ឬ ដកកន្សោមប្រភាគគេត្រូវ ៖

១_តម្រូវប្រភាគនីមួយៗឲ្យមានភាគបែងរួមដូចគ្នា

២_ធ្វើប្រមាណវិធីបូក ឬ ដកតែភាគយក រក្សាទុកភាគបែងរួម

៣_សម្រួលលទ្ធផល

១០. ប្រមាណវិធីគុណ និង ប្រមាណវិធីចែក

$$\frac{A}{B}\times\frac{C}{D}=\frac{A\times C}{B\times D} \quad \text{និង} \quad \frac{A}{B}\div\frac{C}{D}=\frac{A\times D}{B\times C}$$

ដែល B , C , D ខុសពីសូន្យ ។

១១. វិធាន

✍ ដាក់ភាគយក និង ភាគបែងនៃកន្សោមទាំងអស់ជាផលគុណកត្តា

✍ សម្រួលកន្សោមប្រភាគនីមួយៗ

✍ ធ្វើប្រមាណវិធីគុណ ឬ វិធីចែកតាមរូបមន្តខាងលើ ។

ជំពូកទី០៤

សមីការ និង វិសមីការ

១_សមីការដឺក្រេទីពីរមានមួយអញ្ញាត

ក_និយមន័យ

សមីការដែលមានរាងទូទៅ $ax^2+bx+c=0$ ហៅថាសមីការដឺក្រេទីពីរ

មានមួយអញ្ញាតដែល x ជាអញ្ញាត ហើយលេខមេគុណ a,b,c ជាចំនួនថេរ

និង $a\neq 0$ ។

ខ_ដំណោះស្រាយសមីការដឺក្រេទីពីរ

សន្មតថាគេមានសមីការ $ax^2+bx+c=0 \quad , a\neq 0$

ឌីសគ្រីមីណង់សមីការ $\Delta=b^2-4ac$

-បើ $\Delta>0$ សមីការមានឫសពីរជាចំនួនពិតផ្សេងគ្នាគឺ :

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \quad ; \quad x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

-បើ $\Delta=0$ សមីការមានឫសឌុប $x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}$

-បើ $\Delta<0$ សមីការមានឫសពីរផ្សេងគ្នាជាចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់គ្នា :

$$x_1=\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad ; \quad x_2=\frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

គ_ទំនាក់ទំនងឫស និង លេខមេគុណ

បើ α និង β ជាឫសរបស់សមីការ $\mathbf{ax^2+bx+c=0}$, $\mathbf{a\neq 0}$ នោះគេមាន :

-ផលបូកឫស $\mathbf{S=\alpha+\beta=-\frac{b}{a}}$

-ផលគុណឫស $\mathbf{P=\alpha.\beta=\frac{c}{a}}$

ឃ_មុខងារណាឫសនៃសមីការដឺក្រេទីពីរខាយ

ឧបមាថាគេមានសមីការដឺក្រេទីពីរ $\mathbf{ax^2+bx+c=0}$, $\mathbf{a\neq 0}$

-បើ $\mathbf{a+b+c=0}$ សមីការមានឫស $\mathbf{x_1=1}$; $\mathbf{x_2=\frac{c}{a}}$

-បើ $\mathbf{b=a+c}$ សមីការមានឫស $\mathbf{x_1=-1}$, $\mathbf{x_2=-\frac{c}{a}}$

ខ_រូបមន្តដាក់ជាផលគុណកត្តា

បើ α និង β ជាឫសរបស់សមីការ $\mathbf{ax^2+bx+c=0}$, $\mathbf{a\neq 0}$ នោះគេបាន :

$\mathbf{ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)}$ ។

ច_បង្កើតសមីការដឺក្រេទីពីរ

បើគេដឹងផលបូក $\alpha+\beta=\mathbf{S}$ និង ផលគុណ $\alpha\beta=\mathbf{P}$ នោះ α និង β

ជាឫសសមីការដឺក្រេទីពីរ $\mathbf{x^2-Sx+P=0}$ ។

២_វិសមភាព

ក_លក្ខណៈវិសមភាព

1. ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ បើ $\mathbf{a>b}$ នោះគេបាន $\mathbf{a+c>b+c}$

ឬ $\mathbf{a-c>b-c}$ ។

2. ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ គេមាន :

-បើ $\mathbf{a>b}$ និង $\mathbf{c>0}$ នោះ $\mathbf{ac>bc}$

-បើ $\mathbf{a>b}$ និង $\mathbf{c<0}$ នោះ $\mathbf{ac<bc}$

ខ_វិសមភាពមធ្យមនព្វន្ត និង មធ្យមធរណីមាត្រ

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $\mathbf{a\geq 0}$ និង $\mathbf{b\geq 0}$ គេមាន :

$$\frac{\mathbf{a+b}}{\mathbf{2}} \geq \sqrt{\mathbf{ab}}$$ ។

វិសមភាពនេះក្លាយជាសមភាពលុះត្រាតែ $\mathbf{a=b}$ ។

៣_វិសមីការតម្លៃដាច់ខាត

បើ $\alpha>\mathbf{0}$ នោះគេបាន :

1. $|\mathbf{ax+b}|<\alpha \Leftrightarrow \mathbf{ax+b}<\alpha$ និង $\mathbf{ax+b}>-\alpha$

2. $|\mathbf{ax+b}|>\alpha \Leftrightarrow \mathbf{ax+b}>\alpha$ ឬ $\mathbf{ax+b}<-\alpha$

3. $|\mathbf{ax+b}|=\alpha \Leftrightarrow \mathbf{ax+b}=\pm\alpha$

៤_សញ្ញារបស់ទ្វេធាដឺក្រេទីមួយ

ចំពោះទ្វេធា $\mathbf{f(x)=ax+b}$ មាន $\mathbf{x=-\frac{b}{a}}$ ជាឫស គេកំណត់សញ្ញាទ្វេធានេះ

ទៅតាមសញ្ញារបស់ $\mathbf{a}$ ដូចតារាងខាងក្រោម :

$\mathbf{x}$	$-\infty$	$-\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}}$	$+\infty$
$\mathbf{f(x)=ax+b}$	សញ្ញាផ្ទុយពី $\mathbf{a}$	0	សញ្ញាដូច $\mathbf{a}$

៥_សញ្ញារបស់ត្រីធាដឺក្រេទីពីរ

ចំពោះត្រីធា $\mathbf{f(x)=ax^2+bx+c}$ មានឫសពីរ α និង β ដែល $\alpha<\beta$ ។

$\mathbf{x}$	$-\infty$	α		β	$+\infty$
$\mathbf{f(x)=ax^2+bx+c}$	សញ្ញាដូច $\mathbf{a}$	0	សញ្ញាផ្ទុយពី $\mathbf{a}$	0	សញ្ញាដូច $\mathbf{a}$

៦_ចម្លើយវិសមីការដឺក្រេទីពីរ

_ករណី $\Delta>0$ និង $a>0$ មានឫស α,β $(\alpha<\beta)$

ក. $\mathbf{ax^2+bx+c>0}$ មានចម្លើយ $\mathbf{x<\alpha}$, $\mathbf{x>\beta}$ ។

ខ. $\mathbf{ax^2+bx+c<0}$ មានចម្លើយ $\alpha<\mathbf{x}<\beta$ ។

គ. $\mathbf{ax^2+bx+c\geq 0}$ មានចម្លើយ $\mathbf{x\leq\alpha}$, $\mathbf{x\geq\beta}$ ។

ឃ. $\mathbf{ax^2+bx+c\leq 0}$ មានចម្លើយ $\alpha\leq\mathbf{x}\leq\beta$ ។

_ករណី $\Delta=0$ និង $a>0$ មានឫសឌុប

ក. $ax^2+bx+c>0$ មានចម្លើយគ្រប់ចំនួនពិតលើកលែងតែ $x=-\frac{b}{2a}$

ខ. $ax^2+bx+c<0$ គ្មានចម្លើយ ។

គ. $ax^2+bx+c\geq 0$ មានចម្លើយគ្រប់ចំនួនពិតទាំងអស់ ។

ឃ. $ax^2+bx+c\leq 0$ មានចម្លើយ $x=-\frac{b}{2a}$ ។

-ករណី $\Delta<0$ និង $a>0$ មានឫសជាចំនួនកុំផ្លិច

ក. $ax^2+bx+c>0$ មានចម្លើយគ្រប់ចំនួនពិតទាំងអស់ ។

ខ. $ax^2+bx+c<0$ គ្មានចម្លើយ ។

គ. $ax^2+bx+c\geq 0$ មានចម្លើយគ្រប់ចំនួនពិតទាំងអស់ ។

ឃ. $ax^2+bx+c\leq 0$ គ្មានចម្លើយ ។

ជំពូកទី០៥

ស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត

I . ស្វ៊ីតនព្វន្ត និង ស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

១_ស្វ៊ីតចំនួនពិត

ស្វ៊ីតនៃចំនួនពិតគឺជាអនុគមន៍លេខដែលកំនត់ពីសំណុំ IN ទៅសំណុំ IR ។

គេកំនត់សរសេរស្វ៊ីតមួយដោយ (U_n) ឬ $(U_n)_{n\in IN}$ ដែល $U_n = f(n)$

២.អថេរភាពនៃស្វ៊ីត

ក-ស្វ៊ីតកើន

គេថាស្វ៊ីត (U_n) ជាស្វ៊ីតកើនលើ IN កាលណាគ្រប់ $n\in IN$

គេមាន $U_{n+1} > U_n$

ខ-ស្វ៊ីតចុះ

គេថាស្វ៊ីត (U_n) ជាស្វ៊ីតចុះលើ IN កាលណាគ្រប់ $n\in IN$

គេមាន $U_{n+1} < U_n$

គ-ស្វ៊ីតម៉ូណូតូន

គេថាស្វ៊ីត (U_n) ជាស្វ៊ីតម៉ូណូតូនកាលណាវាជាស្វ៊ីតកើនជានិច្ច ឬ ជាស្វ៊ីតចុះជានិច្ច ។

៣.ស៊ីតទាល់

ក-ស៊ីតទាល់លើ

គេថាស៊ីត(U_n) ជាស៊ីតទាល់លើកាលណាមានចំនួនពិត M ដែលបំពេញ

លក្ខខណ្ឌ $\forall n\in IN : U_n \le M$ ។

ខ-ស៊ីតទាល់ក្រោម

គេថាស៊ីត (U_n) ជាស៊ីតទាល់ក្រោមកាលណាមានចំនួនពិត m ដែល

ចំពោះ $\forall n\in IN : U_n \ge m$ ។

គ-ស៊ីតទាល់

គេថាស៊ីត (U_n) ជាស៊ីតទាល់កាលណាវាជាស៊ីត ទាល់លើផង និងទាល់

ក្រោមផង ។

៤.ស៊ីតខួប

គេថាស៊ីត (U_n) ជាស៊ីតខួបដែលមានខួបស្មើ p កាលណា

ចំពោះ $\forall n\in IN : U_{n+p} = U_n$, $p\in IN^*$ ។

២_ស៊ីតនព្វន្ត

-ស៊ីតនព្វន្ត គឺជាស៊ីតនៃចំនួនពិតដែលមានតួនីមួយៗ (ក្រៅពីតួទីមួយ) ស្មើនឹងតួមុនបន្ទាប់បូកចំនួនថេរ d មួយហៅថាផលសងរួម ឬ រេសុងនៃស៊ីត

រូបមន្តផលសងរួម $d = u_{n+1} - u_n$ ។

-តួទី n នៃស៊ីតនព្វន្ត $u_n = u_1 + (n-1)d$

-ផលបូក n តួដំបូងនៃស៊ីតនព្វន្ត

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}(u_k) = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n = \frac{n(u_1 + u_2)}{2}$$

៣_ស៊ីតធរណីមាត្រ

-ស៊ីតធរណីមាត្រ គឺជាស៊ីតនៃចំនួនពិតដែលមានតួនីមួយៗ (ក្រៅពីតួទីមួយ) ស្មើនឹងតួមុនបន្ទាប់គុណនឹងចំនួនថេរ q មួយដែលខុសពីសូន្យ ។

ចំនួនថេរ q ហៅថាផលធៀបរួម ឬ រេសុងនៃស៊ីត ។

រូបមន្តផលធៀបរួម $q = \frac{u_{n+1}}{u_n}$ ។

-តួទី n នៃស៊ីតធរណីមាត្រ $u_n = u_1 \times q^{n-1}$

-ផលបូក n តួដំបូងនៃស៊ីតធរណីមាត្រ

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}(u_k) = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n = u_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

៤_រូបមន្តផលបូកស៊ីតនព្វន្តមានលំដាប់ខ្ពស់

$$1/\ \sum_{k=1}^{n}(k) = 1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$2/\ \sum_{k=1}^{n}\left(k^2\right) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$3/\ \sum_{k=1}^{n}\left(k^3\right) = 1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

II_របៀបគណនាផលបូកតួនៃស្វ៊ីតផ្សេងៗ

១_និមិត្តសញ្ញា $\sum$ សម្រាប់ផលបូកនៃស្វ៊ីត

ផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីត $u_1, u_2, u_3, ..., u_n$ កំនត់តាងដោយ :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (u_k) = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n$$

២_លក្ខណៈផលបូកតួនៃស្វ៊ីត

១. $\sum_{k=1}^{n} (\lambda) = \lambda + \lambda + \lambda + ... + \lambda = n\lambda$

២. $\sum_{k=1}^{n} (\lambda u_k) = \lambda \sum_{k=1}^{n} (u_k)$ (λ ជាចំនួនថេរ)

៣. $\sum_{k=1}^{n} (u_k + v_k - w_k) = \sum_{k=1}^{n} (u_k) + \sum_{k=1}^{n} (v_k) - \sum_{k=1}^{n} (w_k)$

៤. $\sum_{k=1}^{n} (u_k + v_k)^2 = \sum_{k=1}^{n} (u_k{}^2) + 2\sum_{k=1}^{n} (u_k v_k) + \sum_{k=1}^{n} (v_k{}^2)$

៣_របៀបគណនាផលបូកស្វ៊ីតដែលមានទម្រង់ ៖

$S_n = 1^p + 2^p + 3^p + ... + n^p$ ដែល $p = 1 ; 2 ; 3 ;...$

ដើម្បីគណនាផលបូកនេះគេត្រូវអនុវត្តន៍តាមជំហានខាងក្រោម :

-គណនា $(n+1)^{p+1} - n^p$

-ឱ្យតម្លៃ $n = 1 ; 2 ; 3 ; ....; n$

-ធ្វើវិធីបូក ។

៤-របៀបគណនាផលបូកស្វ៊ីតដែលមានទម្រង់ ៖

$$S_n = \frac{1}{a_1a_2} + \frac{1}{a_2a_3} + \frac{1}{a_3a_4} + \ldots .. + \frac{1}{a_na_{n+1}}$$

ដែល $a_{n+1} - a_n = d$ ថេរ ហើយ $d \neq 0$ ។

ដើម្បីគណនាផលបូកនេះគេត្រូវ :

-បម្លែងតួ $\frac{1}{a_na_{n+1}} = \frac{1}{d}.\frac{a_{n+1} - a_n}{a_na_{n+1}} = \frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}}\right)$

-ឱ្យតម្លៃ $n = 1 ; 2 ; 3 ; \ldots ; n$

-ធ្វើវិធីបូក

៥-របៀបគណនាផលបូកស្វ៊ីតដែលមានទម្រង់ ៖

$$S_n = \frac{1}{a_1a_2a_3} + \frac{1}{a_2a_3a_4} + \frac{1}{a_3a_4a_5} + \ldots .. + \frac{1}{a_na_{n+1}a_{n+2}}$$

ដែល $a_{n+2} - a_n = d$ ថេរ ហើយ $d \neq 0$ ។

ដើម្បីគណនាផលបូកនេះគេត្រូវ :

-បម្លែងតួ $\frac{1}{a_na_{n+1}a_{n+2}} = \frac{1}{d}.\frac{a_{n+2} - a_n}{a_na_{n+1}a_{n+2}} = \frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_na_{n+1}} - \frac{1}{a_{n+1}a_{n+2}}\right)$

-ឱ្យតម្លៃ $n = 1 ; 2 ; 3 ; \ldots ; n$

-ធ្វើវិធីបូក

៦_របៀបគណនាផលបូកស្វ៊ីតដែលមានទម្រង់ ៖

$$S_n = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + ... + a_nb_n$$

ដែល (a_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្តមានផលសងរួម d និង (b_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានរេសុង q ។

ដើម្បីគណនាផលបូកនេះគេត្រូវគណនា $S_n - q\,S_n$ រួចទាញរក S_n ។

៧_សំគាល់

គេឱ្យ $S_n = \sum_{k=1}^{n}(u_k) = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n$

ដើម្បីគណនាផលបូកខាងលើនេះគេត្រូវ ៖

-សរសេរតួ u_k ជារាង $u_k = t_{k+1} - t_k$ ឬ $u_k = t_k - t_{k+1}$ (បើអាច)

-ករណីគេអាចសរសេរ $u_k = t_{k+1} - t_k$ នោះគេបាន ៖

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}(u_k) = \sum_{k=1}^{n}(t_{k+1} - t_k) = t_{n+1} - t_1$$

-ករណីគេអាចសរសេរ $u_k = t_k - t_{k+1}$ នោះគេបាន ៖

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}(u_k) = \sum_{k=1}^{n}(t_k - t_{k+1}) = t_1 - t_{n+1}$$

III_របៀបកំនត់តួទី n តាមផលសងតួនៃស៊ីត

១_ផលសងតួលំដាប់ទីមួយ ៖

_គេមានស៊ីត $(a_n): a_1 ; a_2 ; a_3 ; ..... ; a_n$

ហើយ$b_1 = a_2 - a_1 ; b_2 = a_3 - a_2 ; b_3 = a_4 - a_3 ; .....$ នោះគេថាស៊ីត

$(b_n): b_1 ; b_2 ; b_3 ; .... ; b_n$ ជាផលសងតួលំដាប់ទីមួយនៃស៊ីត(a_n) ។

_រូបមន្តគណនាតួ a_n

គេមាន $b_n = a_{n+1} - a_n$

គេបាន $\sum_{k=1}^{n-1}(b_k) = \sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1} - a_k)$

ដោយ $\sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1} - a_k) = (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + ... + (a_n - a_{n-1})$

$$= a_n - a_1$$

គេបាន $\sum_{k=1}^{n-1}(b_k) = a_n - a_1$

ដូចនេះ $a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(b_k)$ ។

២_ផលសងតួលំដាប់ទីពីរ ៖

_គេមានស៊ីត $(a_n): a_1 ; a_2 ; a_3 ; ..... ; a_n$ ហើយ

$b_1 = a_2 - a_1 ; b_2 = a_3 - a_2 ; b_3 = a_4 - a_3 ; ..... ; b_n = a_{n+1} - a_n$

$(b_n): b_1 ; b_2 ; b_3 ; .... ; b_n$ ជាផលសងតួលំដាប់ទីមួយនៃស៊ីត (a_n)

-រូបមន្តគណនាតួ a_n គឺ $a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(b_k)$ ។

-ស្វ៊ីត (c_n) ជាផលសងលំដាប់ទីពីរនៃស្វ៊ីត (a_n) គឺជាផលសងលំដាប់ទីមួយនៃស្វ៊ីត (b_n) ដែល $c_n = b_{n+1} - b_n$; $n = 1 , 2 , 3 ,...$

រូបមន្តគណនាតួទី n គឺ $b_n = c_1 + \sum_{i=1}^{n-1}(c_i)$; $n \geq 2$ ។

IV-វិចារអនុមានរួមគណិតវិទ្យា

និយមន័យ ៖

$P(n)$ ជាសំណើដែលទាក់ទងនឹងចំនួនគត់ n

ដើម្បីស្រាយបញ្ជាក់ថា $P(n)$ ពិតចំពោះគ្រប់ $n \in IN^*$ គេត្រូវ ៖

1. ផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $P(n)$ ពិតចំពោះ $n = 1$
2. ឧបមាថា $P(n)$ ពិតចំពោះតម្លៃ n
3. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $P(n)$ ពិតនាំឱ្យបាន $P(n+1)$ ពិត

IV_របៀបគណនាតួទូទៅនៃស្វ៊ីតតាមទំនាក់ទំនងកំណើន

១_ករណីស្គាល់ទំនាក់ទំនងកំណើន $u_{n+1} = a\,u_n + b$

បើគេស្គាល់ថា (u_n) ជាស្វ៊ីតនៃចំនួនពិតហើយផ្ទៀងផ្ទាត់

ទំនាក់ទំនងកំណើន $u_{n+1} = a\,u_n + b$ ចំពោះគ្រប់ $n \in IN^*$

និងមានតួ $u_1 = \alpha$ ($|a| \neq 1, a \neq 0$) ។

ដើម្បីកំនត់រកតួ u_n គេត្រូវពិចារណាដូចខាងក្រោម ៖

☞ រកឬសសមីការ $r = a\,r + b$ (ហៅថាសមីការសំគាល់នៃស្វ៊ីត)

☞ តាងស្វ៊ីតជំនួយ $V_n = u_n - r$ រួចត្រូវបង្ហាញថា (V_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ។

☞ រកឱ្យឃើញនូវតួ V_n បន្ទាប់មកគេទាញ $u_n = V_n + r$ ។

២_ករណីស្គាល់ទំនាក់ទំនងកំណើន $u_{n+2} = a\,u_{n+1} + bu_n$

បើគេស្គាល់ថា (u_n) ជាស្វ៊ីតនៃចំនួនពិតហើយផ្ទៀងផ្ទាត់

ទំនាក់ទំនងកំណើន $u_{n+2} = a\,u_{n+1} + b\,u_n$ ចំពោះគ្រប់ $n \in IN^*$

និងមានតួ $u_1 = \alpha$, $u_2 = \beta$

ដើម្បីកំនត់រកតួ u_n គេត្រូវពិចារណាសមីការ $r^2 = a\,r + b$

ឬ $(E): r^2 - a\,.r - b = 0$ (ហៅថាសមីការសំគាល់នៃស្វ៊ីតនេះ)

គេត្រូវសិក្សាករណីផ្សេងៗដូចខាងក្រោម ៖

☞ បើ $\Delta = a^2 + 4b > 0$

សមីការសំគាល់ (E) មានឫសពីរផ្សេងគ្នាជាចំនួនពិត r_1 និង r_2 ។

ក្នុងករណីនេះដើម្បីគណនា u_n យើងត្រូវអនុវត្តន៍ដូចខាងក្រោម ៖

-តាងស្វ៊ីតជំនួយពីរគឺ

$x_n = u_{n+1} - r_1 u_n$ និង $y_n = u_{n+1} - r_2 u_n$

-រកប្រភេទនៃស្វ៊ីត (x_n) និង (y_n)

រួចគណនា x_n និង y_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ឧបមាថាគេបាន $x_n = f(n)$ និង $y_n = g(n)$

-យើងបានប្រព័ន្ធសមីការ $\begin{cases} u_{n+1} - r_1 u_n = f(n) \\ u_{n+1} - r_2 u_n = g(n) \end{cases}$

-ដោះស្រាយរក u_n គេទទួលបាន $u_n = \dfrac{f(n) - g(n)}{r_2 - r_1}$ ។

☞ បើ $\Delta = a^2 + 4b = 0$

សមីការសំគាល់ (E) មានឫសឌុប $r_1 = r_2 = r_0$

ក្នុងករណីនេះដើម្បីគណនា u_n យើងត្រូវអនុវត្តន៍ដូចខាងក្រោម ៖

-តាងស្វ៊ីតជំនួយ $V_n = u_{n+1} - r_0 u_n$ រួចរកប្រភេទនៃស្វ៊ីត (V_n)

និងគណនា V_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។ ឧបមាថា $V_n = f(n)$ ។

-គេទាញបានសមីការ $u_{n+1} - r_0 u_n = f(n)$

រួចត្រូវបំលែងជាទម្រង់ ៖

$\dfrac{u_{n+1}}{{r_0}^{n+1}} - \dfrac{u_n}{{r_0}^n} = \dfrac{f(n)}{{r_0}^{n+1}}$ (ចែកសមីការនឹង ${r_0}^{n+1}$)

-ទាញឱ្យបាន $u_n = {r_0}^n \left[\frac{u_1}{r_0} + \sum_{k=1}^{n-1} [\frac{f(k)}{{r_0}^{k+1}}] \right]$ ។

☞ បើ $\Delta = a^2 + 4b < 0$

សមីការសំគាល់ (E) មានឬសពីរជាចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់គ្នា

គឺ $r_1 = p + i.q$, $r_2 = p - i.q$, $p, q \in IR$ ។

ក្នុងករណីនេះដើម្បីគណនា u_n យើងត្រូវអនុវត្តន៍ដូចខាងក្រោម ៖

-តាងស្វ៊ីតជំនួយ $Z_n = u_{n+1} - (p + i.q)u_n$ រួចត្រូវស្រាយថា

(Z_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រនៃចំនួនកុំផ្លិច ។

រួចគណនា Z_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

-ឧបមាថា $Z_n = A_n + i.B_n$; $A_n , B_n \in IR$, $n \in IN^*$ ។

-គេបានសមីការ $u_{n+1} - (p + iq)\, u_n = A_n + i.B_n$

-ទាញឱ្យបានថា $u_n = -\frac{B_n}{q}$ ។

៣-ករណីស្គាល់ទំនាក់ទំនងកំណើន $u_{n+2} = a\,u_{n+1} + bu_n + c$

បើគេស្គាល់ថា (u_n) ជាស្វ៊ីតនៃចំនួនពិតហើយផ្ទៀងផ្ទាត់

ទំនាក់ទំនងកំណើន $u_{n+2} = a\,u_{n+1} + b\,u_n$ ចំពោះគ្រប់ $n \in IN^*$

និងមានតួ $u_1 = \alpha$, $u_2 = \beta$ ។

ដើម្បីកំនត់រកតួ u_n គេត្រូវអនុវត្តន៍ដូចខាងក្រោម ៖

☞ តាងស្វ៊ីតជំនួយ $w_n = u_n + \lambda$

☞ គេបាន $u_n = w_n - \lambda$, $u_{n+1} = w_{n+1} - \lambda$, $u_{n+2} = w_{n+2} - \lambda$

☞ យក u_n , u_{n+1} , u_{n+2} ជំនួសក្នុង $u_{n+2} = a\,u_{n+1} + bu_n + c$

គេបានសមីការ ៖

$$w_{n+2} - \lambda = a(w_{n+1} - \lambda) + b(w_n - \lambda) + c$$

$$w_{n+2} = a\ w_{n+1} + b\,w_n + (1 - a - b)\lambda + c$$

☞ ត្រូវឱ្យ $(1 - a - b)\lambda + c = 0$ គេទាញបាន $\lambda = \dfrac{c}{a + b - 1}$

(ដែល $a + b \neq 1$) ។

☞ ក្នុងករណីនេះគេបានទំនាក់ទំនងកំណើន

$$w_{n+2} = a\ w_{n+1} + b\ w_n$$

☞ ដោះស្រាយរកតួ w_n តាមវិធីសាស្រ្តដែលបានសិក្សារួចហើយ

ខាងលើ បន្ទាប់មកទាញរកតួ $u_n = w_n - \lambda = w_n - \dfrac{c}{a + b - 1}$

ជំពូកទី០៦ អនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ

១. ទំនាក់ទំនងគ្រឹះ

1. $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$
2. $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$
3. $\cot\theta = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$
4. $\tan\theta . \cot\theta = 1$
5. $1 + \tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$
6. $1 + \cot^2\theta = \dfrac{1}{\sin^2\theta}$

២. រូបមន្តផលបូក និង ផលដក

1. $\sin(a+b) = \sin a\cos b - \sin b\cos a$
2. $\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$
3. $\tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a\tan b}$
4. $\sin(a-b) = \sin a\cos b - \sin b\cos a$
5. $\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b$
6. $\tan(a-b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a\tan b}$

៣. រូបមន្តមុំឌុប

1. $\sin 2a = 2\sin a\cos a$
2. $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - \sin^2 a$
3. $\tan 2a = \dfrac{2\tan a}{1 - \tan^2 a}$
4. $\cot 2a = \dfrac{\cot^2 a - 1}{2\cot a}$

៤. រូបមន្តកន្លះមុំ

1. $\sin^2\frac{a}{2}=\frac{1-\cos a}{2}$
2. $\cos^2\frac{a}{2}=\frac{1+\cos a}{2}$
3. $\tan^2\frac{a}{2}=\frac{1-\cos a}{1+\cos a}$

៥. កន្សោម $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ ជាអនុគមន៍នៃ $t=\tan\frac{x}{2}$

1. $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$
2. $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$
3. $\tan x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$

៦. កន្សោម $\sin 3a$, $\cos 3a$, $\tan 3a$

1. $\sin 3a=3\sin a-4\sin^3 a$
2. $\cos 3a=4\cos^3 a-3\cos a$
3. $\tan 3a=\frac{3\tan a-\tan^3 a}{1-3\tan^2 a}$

៧. រូបមន្តបំលែងពីផលគុណទៅផលបូក

1. $\cos a\cos b=\frac{1}{2}[\ \cos(a+b)+\cos(a-b)]$
2. $\sin a\sin b=\frac{1}{2}[\ \cos(a-b)-\cos(a+b)\ ]$

3. $\sin a\cos b = \frac{1}{2}[\ \sin(a+b)+\sin(a-b)\ ]$

4. $\sin b\cos a = \frac{1}{2}[\ \sin(a+b)-\sin(a-b)\ ]$

៦. រូបមន្តបំលែងពីផលបូកទៅផលគុណ

1. $\cos p+\cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$

2. $\cos p-\cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$

3. $\sin p+\sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$

4. $\sin p-\sin q = 2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}$

5. $\tan p+\tan q = \frac{\sin(p+q)}{\cos p\cos q}$

6. $\tan p-\tan q = \frac{\sin(p-q)}{\cos p\cos q}$

7. $\cot p+\cot q = \frac{\sin(p+q)}{\sin p\sin q}$

8. $\cot p-\cot q = \frac{\sin(q-p)}{\sin p\sin q}$

៧. សមីការត្រីកោណមាត្រ

1. សមីការ $\sin u = \sin v$ មានចម្លើយ

$$\left[\begin{array}{l} u = v+2k\pi \\ u = \pi - v + 2k\pi \quad , \quad k\in Z \end{array}\right.$$

2. សមីការ $\cos u = \cos v$ មានចម្លើយ

$$\left[\begin{array}{l} u = v + 2k\pi \\ u = -v + 2k\pi \quad , \quad k \in Z \end{array}\right.$$

3. សមីការ $\tan u = \tan v$ មានចម្លើយ $u = v + k\pi$

៨. រូបមន្តបម្លែងធ្នូដែលគួរកត់សំគាល់

1. $\left\{\begin{array}{l} \sin(\frac{\pi}{2} - \theta) = \cos\theta \\ \cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = \sin\theta \\ \tan(\frac{\pi}{2} - \theta) = \cot\theta \end{array}\right.$ 2. $\left\{\begin{array}{l} \sin(\pi - \theta) = \sin\theta \\ \cos(\pi - \theta) = -\cos\theta \\ \tan(\pi - \theta) = -\tan\theta \end{array}\right.$

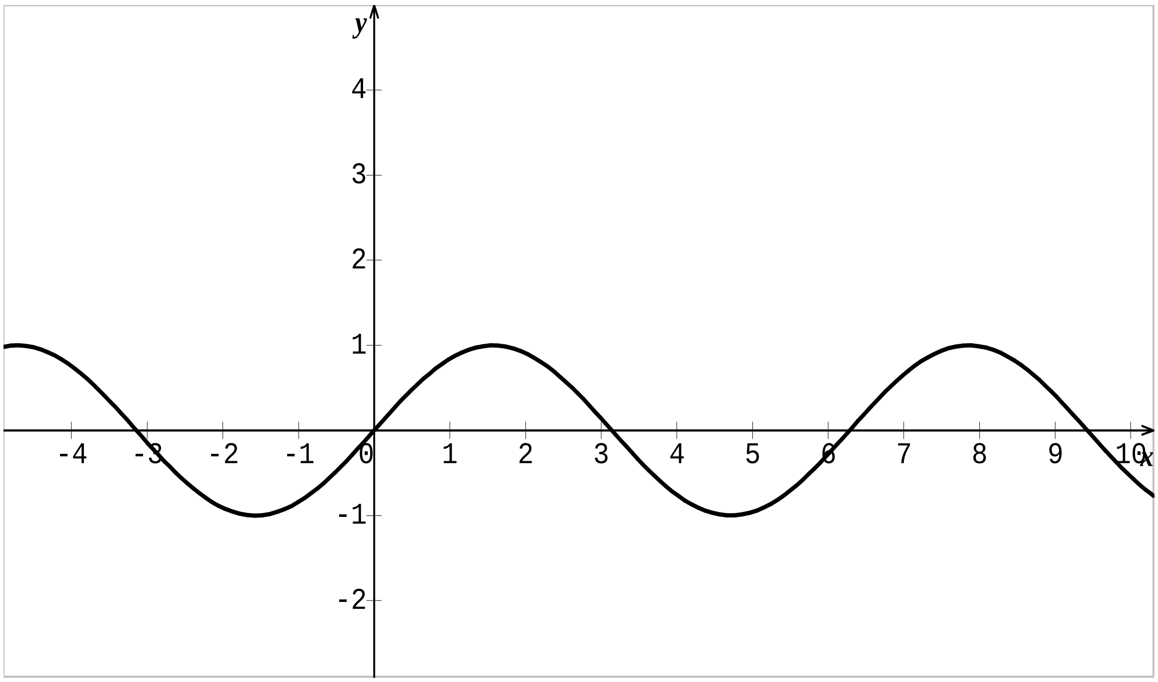
3. $\left\{\begin{array}{l} \sin(\frac{\pi}{2} + \theta) = \cos\theta \\ \cos(\frac{\pi}{2} + \theta) = -\sin\theta \\ \tan(\frac{\pi}{2} + \theta) = -\cot\theta \end{array}\right.$

4. $\left\{\begin{array}{l} \sin(\pi + \theta) = -\sin\theta \\ \cos(\pi + \theta) = -\cos\theta \\ \tan(\pi + \theta) = \tan\theta \end{array}\right.$

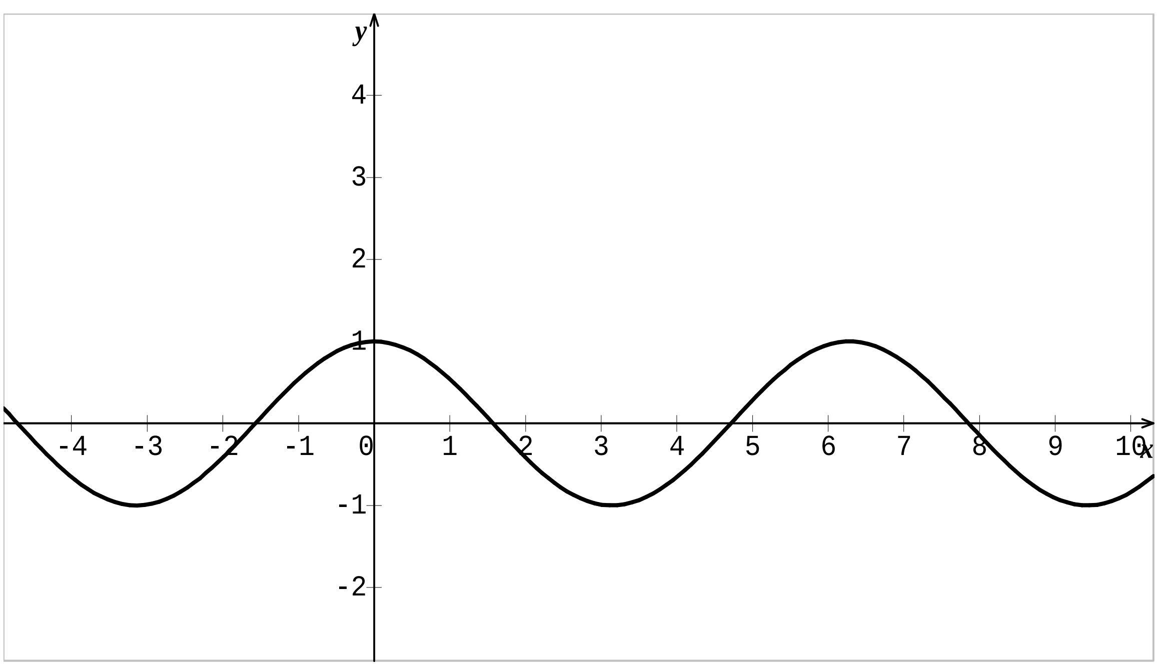
5. $\left\{\begin{array}{l} \sin(\theta + 2k\pi) = \sin\theta \\ \cos(\theta + 2k\pi) = \cos\theta \\ \tan(\theta + k\pi) = \tan\theta \qquad , \quad \forall k \in Z \end{array}\right.$

៩. ក្រាហ្វិកអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ

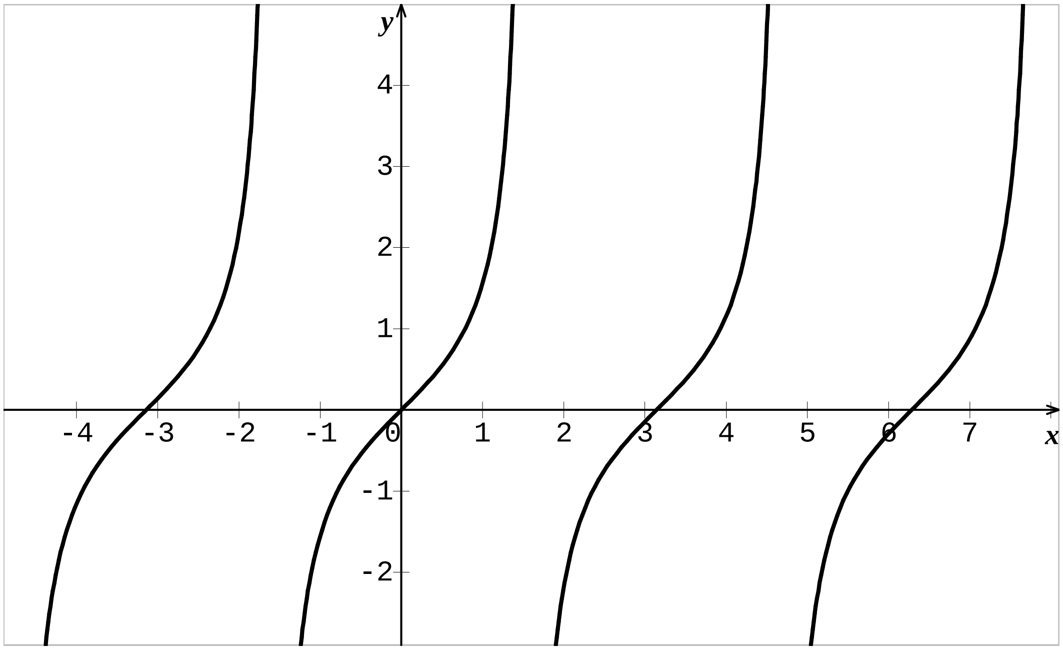
1. ខ្សែកោងអនុគមន៍ $y = \sin x$



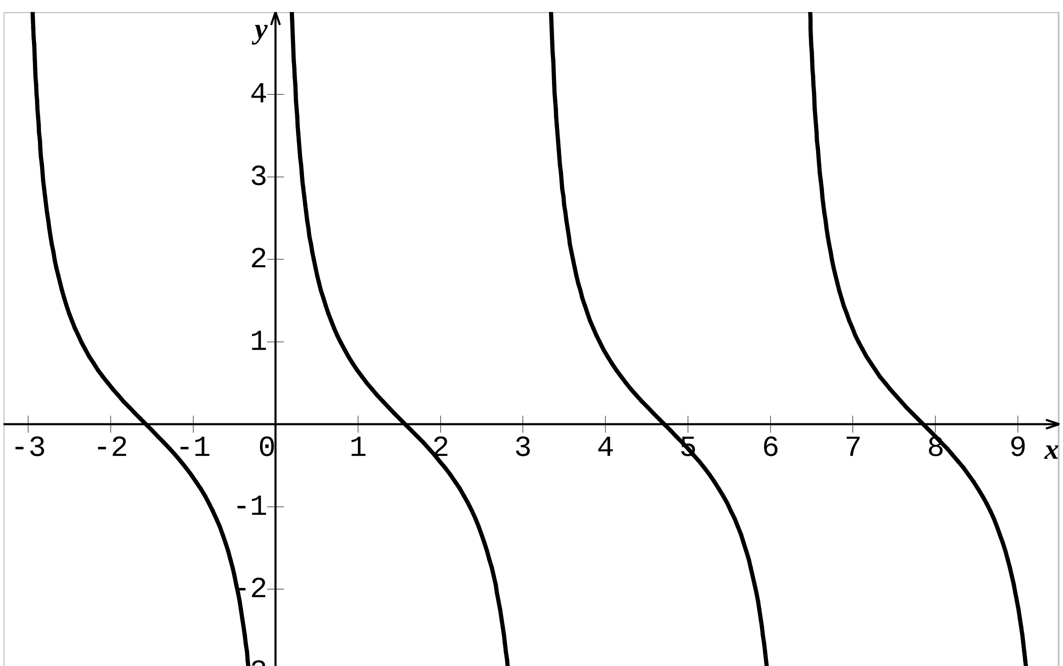
2. ខ្សែកោងអនុគមន៍ $y = \cos x$



3. ខ្សែកោងអនុគមន៍ $y = \tan x$



4. ខ្សែកោងអនុគមន៍ $y = \cot x$



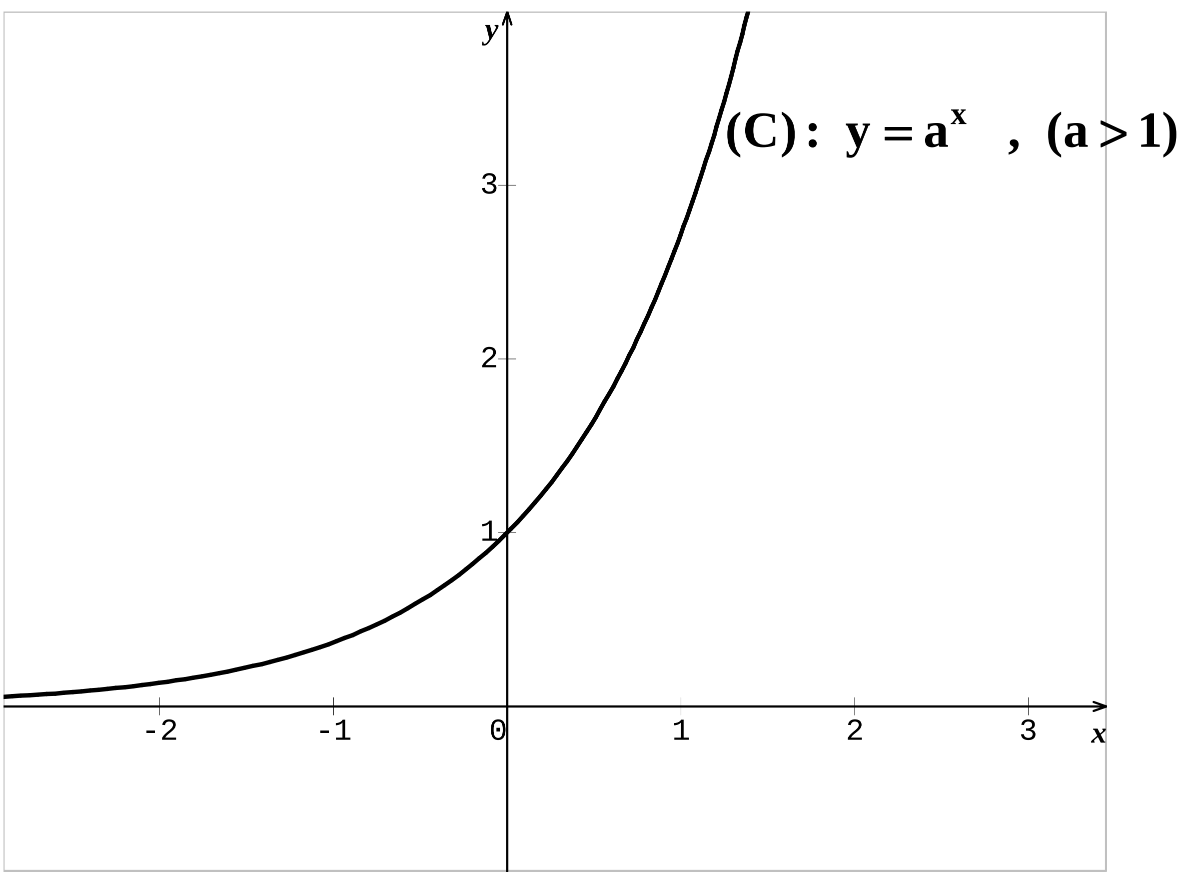
ជំពូកទី០៧

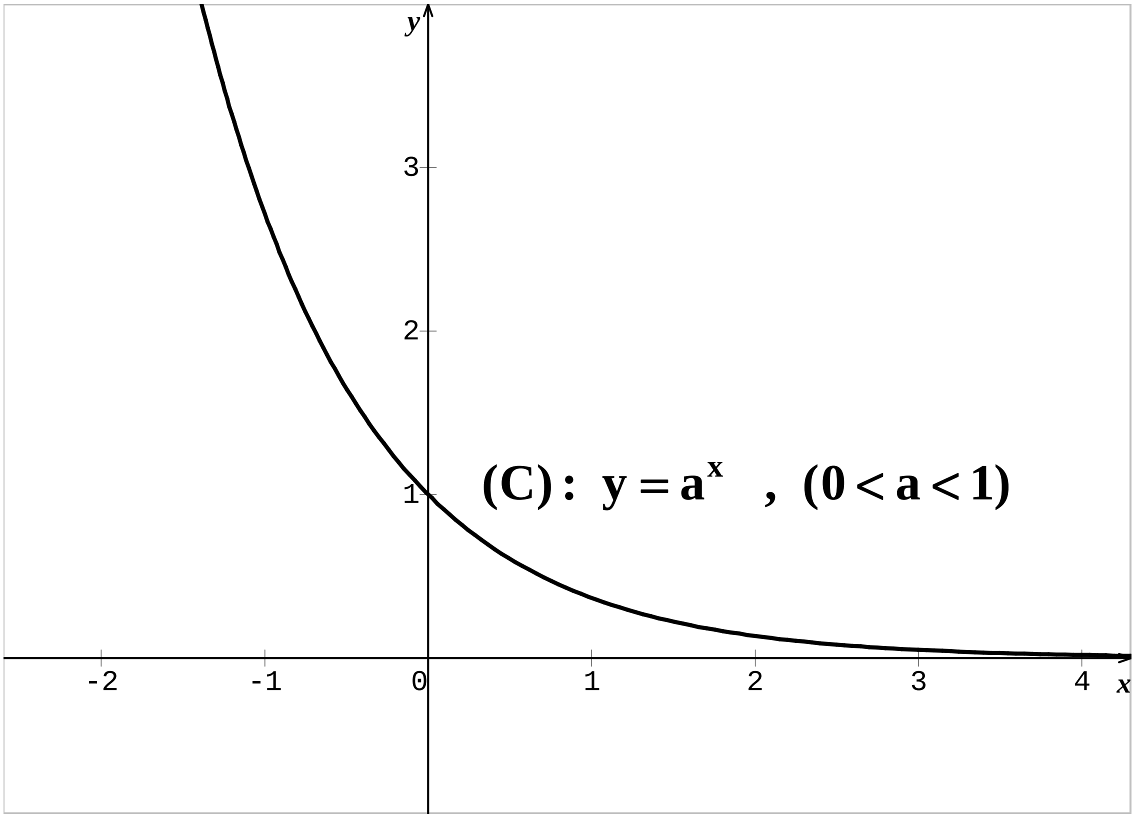
អនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល និង អនុគមន៍លោការីត

1-អនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល

☞អនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល ជាអនុគមន៍កំនត់ដោយ $y=f(x)=a^x$ ដែល $x\in IR$ និង a ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន និងខុសពី 1 ។

☞ក្រាបនៃអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល





☞ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $a > 0$ និង $a \neq 1$ គេបាន

1/ $a^x = a^k \iff x = k$

2/ $a^{f(x)} = a^{g(x)} \iff f(x) = g(x)$

2-អនុគមន៍លោការីត

☞បើគេមាន $y=a^x$ នោះ $x=\log_a y$

ដែល $y>0, a>0$ និង $a\neq 1$ ។

គេថា $f(x)=a^x$ មានអនុគមន៍ច្រាស់ $f^{-1}(x)=\log_a x$ ។

ដូចនេះ $y=\log_a x$ ហៅថាអនុគមន៍លោការីតនៃ x

មានគោល a ។

☞លក្ខណះនៃលោការីត

គ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន x និង y , $a>0, a\neq 1$ គេមាន

1/ $\log_a(xy)=\log_a x+\log_a y$

2/ $\log_a\left(\frac{x}{y}\right)=\log_a x-\log_a y$

3/ $\log_a x^n = n\log_a x$

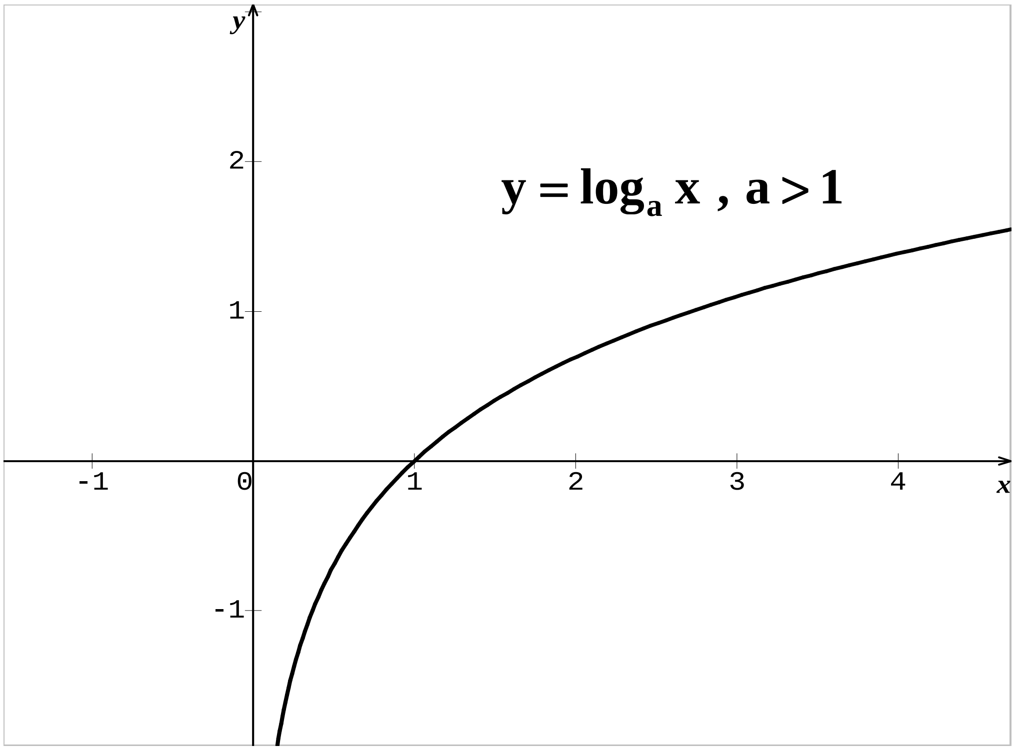
4/ $\log_a x=\frac{1}{\log_x a}$

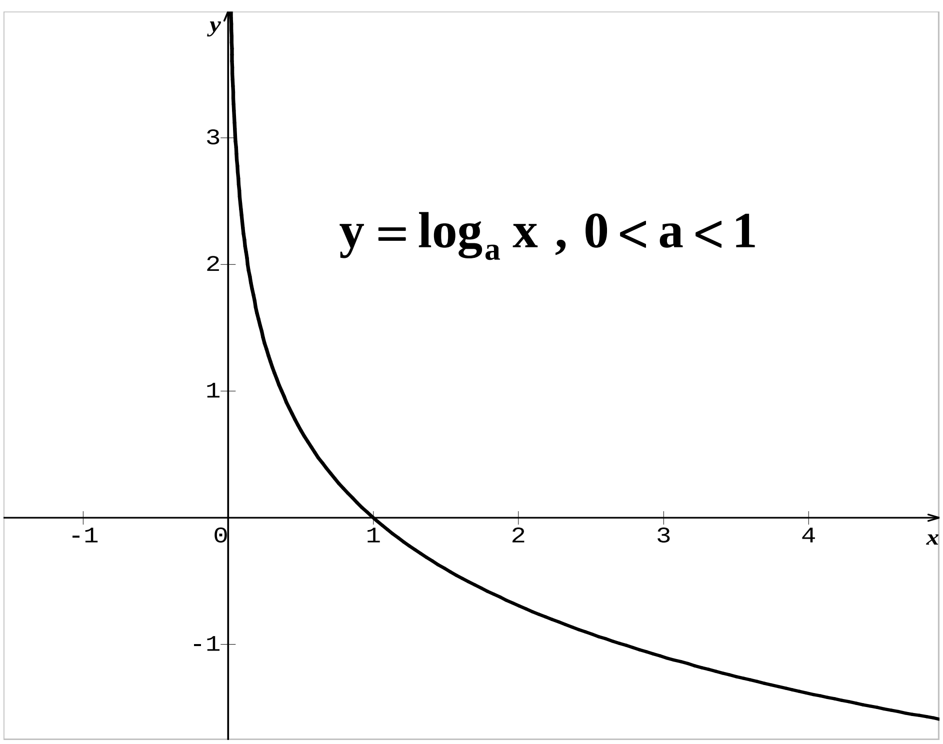
5/ $\log_a a=1$

6/ $\log_a 1=0$

7/ $a^{\log_a b}=b$

☞ក្រាបនៃអនុគមន៍លោការីត





ជំពូកទី០៨

លីមីត និង ភាពជាប់នៃអនុគមន៍

១_លីមីតនៃអនុគមន៍ត្រង់ចំនួនកំណត់

✍ និយមន័យ :

អនុគមន៍ f មានលីមីតស្មើ L កាលណា x ខិតជិត a បើគ្រប់ចំនួន $\varepsilon > 0$ មានចំនួន $\delta > 0$ ដែល $0 < |x-a| < \delta$ នាំឱ្យ $|f(x)-L| < \varepsilon$ ។ គេសរសេរ : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ ។

✍និយមន័យ :

គេថាអនុគមន៍ f ខិតទៅ $+\infty$ ឬ $-\infty$ កាលណា x ខិតទៅជិត a បើចំពោះគ្រប់ចំនួន $M > 0$ មាន $\delta > 0$ ដែល $0 < |x-a| < \delta$ នាំឱ្យ $f(x) > M$ ឬ $f(x) < -M$ ។

គេសរសេរ $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ ឬ $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ ។

២_លីមីតនៃអនុគមន៍ត្រង់អនន្ត

✍ គេថាអនុគមន៍ f មានលីមីតស្មើ L កាលណា x ទៅជិត $+\infty$ ឬ $-\infty$ បើចំពោះគ្រប់ចំនួន $\varepsilon > 0$ គេអាចរក $N > 0$ ដែល $x > N$ ឬ $x < -N$ នាំឱ្យ $|f(x)-L| < \varepsilon$ ។

គេសរសេរ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$ ឬ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L$ ។

✍ គេថាអនុគមន៍ f មានលីមីត $+\infty$ កាលណា x ទៅជិត $+\infty$

បើចំពោះគ្រប់ចំនួន $M > 0$ គេមាន $N > 0$ ដែល $x > N$ នាំឱ្យ

$f(x) > M$ ។គេសរសេរ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ ។

✍ គេថាអនុគមន៍ f មានលីមីត $+\infty$ កាលណា x ទៅជិត $-\infty$

បើចំពោះគ្រប់ចំនួន $M > 0$ គេមាន $N > 0$ ដែល $x < -N$ នាំឱ្យ

$f(x) > M$ ។គេសរសេរ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ ។

៣_ប្រមាណវិធីលើលីមីត

បើ $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$; $\lim\limits_{x\to a} g(x) = M$ និង $\lim\limits_{x\to a} h(x) = N$

ដែល L ; M ; N ជាចំនួនពិតនោះគេបាន :

$1/\ \lim\limits_{x\to a}\left[f(x) \pm g(x)\right] = L \pm M$ (a ជាចំនួនកំណត់ ឬអនន្ត)

$2/\ \lim\limits_{x\to a}\left[f(x) + g(x) - h(x)\right] = L + M - N$

$3/\ \lim\limits_{x\to a}\left[k\, f(x)\right] = k \lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\right]$

$4/\ \lim\limits_{x\to a}\left[f(x).g(x).h(x)\right] = L.M.N$

$$5/\ \lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{L}{M}\ ;\ M \neq 0$$

$6/\ \lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\right]^n = L^n$ ដែល n ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិមិនសូន្យ ។

៤_លីមីតនៃអនុគមន៍អសនិទាន

$1/\lim\limits_{x\to a}\left(\sqrt[n]{x}\right)=\sqrt[n]{a}$ ចំពោះ $a\ge 0$ និង $n\in IN$

$2/\lim\limits_{x\to a}\left(\sqrt[n]{x}\right)=\sqrt[n]{a}$ ចំពោះ $a<0$ និង n ជាចំនួនគត់សេស

$3/\lim\limits_{x\to a}\left[\sqrt[n]{f(x)}\right]=\sqrt[n]{\lim\limits_{x\to a}[f(x)]}=\sqrt[n]{L}$

បើ $L\ge 0$ និង n ជាចំនួនគត់គូ ឬ $L<0$ និង n ជាចំនួនគត់សេស ។

៥_លីមីតនៃអនុគមន៍បណ្ដាក់

បើ f និង g ជាអនុគមន៍ដែលមាន $\lim\limits_{x\to a}[g(x)]=L$

និង $\lim\limits_{x\to L}f(x)=f(L)$ នោះ $\lim\limits_{x\to a}f\left[g(x)\right]=f(L)$ ។

៦_លីមីតតាមការប្រៀបធៀប

✍ បើគេមានអនុគមន៍ $f\,;g$ និងចំនួនពិត A ដែល $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$

និង $f(x)\ge g(x)$ ចំពោះគ្រប់ $x\ge A$ នោះ $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$ ។

✍ បើគេមានអនុគមន៍ $f\,;g$ និងចំនួនពិត A ដែល $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$

និង $f(x)\le g(x)$ ចំពោះគ្រប់ $x\ge A$ នោះ $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$ ។

✍ បើគេមានអនុគមន៍ $f\,;g;h$ និងចំនួនពិត A ដែល

$\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=\lambda$ និង $g(x)\le f(x)\le h(x)$

ចំពោះគ្រប់ $x\ge A$ នោះ $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lambda$ ។

✍ បើគេមានអនុគមន៍ $f\ ;\ g$ និងចំនួនពិត A ដែល $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lambda$

$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lambda'$ និង $f(x)\le g(x)$ ចំពោះគ្រប់ $x\ge A$

នោះ $\lambda\le\lambda'$ ។

៧_លីមីតរាងមិនកំនត់

✍ **លីមីតដែលមានរាងមិនកំនត់ $\frac{0}{0}$**

វិធាន ដើម្បីគណនាលីមីតដែលមានរាងមិនកំនត់ $\frac{0}{0}$ គេត្រូវបំបែក ភាគយក និង ភាគបែងជាផលគុណកត្តា ហើយសម្រួលកត្តារួម រួចគណនា លីមីតនៃកន្សោមថ្មី ។

✍ **លីមីតដែលមានរាងមិនកំនត់ $\frac{\infty}{\infty}$**

វិធាន ដើម្បីគណនាលីមីតដែលមានរាងមិនកំនត់ $\frac{\infty}{\infty}$ គេត្រូវដាក់តួ ដែលមានដឺក្រេធំជាងគេនៅភាគយក និង ភាគបែងជាផលគុណកត្តា ហើយសម្រួលកត្តារួម រួចគណនាលីមីតនៃកន្សោមថ្មី ។

✍ **លីមីតដែលមានរាងមិនកំនត់ $+\infty-\infty$**

វិធាន ដើម្បីគណនាលីមីតដែលមានរាងមិនកំនត់ $+\infty-\infty$ គេត្រូវ ដាក់តួដែលមានដឺក្រេធំជាងគេនៅភាគយក និង ភាគបែងជាផលគុណ

នៃកត្តា ហើយសម្រួលកត្តារួម រួចគណនាលីមីតនៃកន្សោមថ្មី ។

៨_លីមីតនៃអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ

-បើ **a** ជាចំនួនពិតស្ថិតនៅក្នុងដែនកំនត់នៃអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រដែល

ឱ្យនោះគេបាន $\lim\limits_{x\to a}\sin x=\sin a$; $\lim\limits_{x\to a}\cos x=\cos a$

និង $\lim\limits_{x\to a}\tan x=\tan a$ ។

-វិធាន បើ **x** ជារង្វាស់មុំ ឬធ្នូគិតជារ៉ាដ្យង់នោះគេបាន

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ និង $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x}=0$ ។

៩_លីមីតនៃអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល

1/ $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{x}=+\infty$

2/ $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{x}=0$

3/ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x}}{x}=+\infty$

4/ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x}}{x^{n}}=+\infty\quad(n>0)$

5/ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{n}}{e^{x}}=0\quad(n>0)$

១០_លីមីតនៃអនុគមន៍លោការីតនេពែ

$1/\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$

$2/\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$

$3/\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$

$4/\lim\limits_{x\to 0}x\ln x=0$

$5/\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^n}=0\ \ (n>0)$

$6/\lim\limits_{x\to 0^+}x^n\ln x=0$

១១_លីមីតស្វ៊ីត និង ស៊េរី

◆ ប្រមាណវិធីលើលីមីត

គេមានស្វ៊ីត (a_n) និង (b_n) ដែលមាន $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=M$

និង $\lim\limits_{n\to+\infty}b_n=N$ គេបាន

ក. $\lim\limits_{n\to+\infty}ka_n=k.M$

ខ. $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n+b_n)=M+N$, $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n-b_n)=M-N$

គ. $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_nb_n)=M.N$

បើ $N\neq 0$ នោះ $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{M}{N}$

◆ លីមីតស្វ៊ីតធរណីមាត្រអនន្ត

ក.បើ $\mathbf{r > 1}$ នោះ $\mathbf{\lim\limits_{n\to+\infty} r^n = +\infty}$ ហើយ $\mathbf{r^n}$ ជាស្វ៊ីតរីកទៅរក $+\infty$

ខ.បើ $\mathbf{r = 1}$ នោះ $\mathbf{(r^n)}$ ជាស្វ៊ីតថេរហើយ $\mathbf{\lim\limits_{n\to+\infty} r^n = 1}$ ។

គ.បើ $\mathbf{r = 0}$ នោះ $\mathbf{(r^n)}$ ជាស្វ៊ីតថេរហើយ $\mathbf{\lim\limits_{n\to+\infty} r^n = 0}$ ។

ឃ.បើ $\mathbf{r \le -1}$ នោះស្វ៊ី $\mathbf{(r^n)}$ ជាស្វ៊ីតឆ្លាស់ហើយកាលណា $\mathbf{n \to +\infty}$

គេមិនអាចកំណត់លីមីតនៃ $\mathbf{(r^n)}$ បានទេ ។

◆ ស្វ៊ីតធរណីមាត្រអនន្តដែលរួម : ស្វ៊ីត $\mathbf{(r^n)}$ សមមូល $\mathbf{-1 \le r \le 1}$

◆ ស៊េរីរួម និង ស៊េរីរីក :

ក-បើស៊េរី $\mathbf{\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n)}$ ជាស៊េរីរួមនោះ $\mathbf{\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0}$

ខ-បើស្វ៊ីត $\mathbf{(a_n)}$ មិនរួមរក $\mathbf{0}$ ទេនោះ $\mathbf{\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n)}$ ជាស៊េរីរីក ។

◆ ភាពរួមនិងរីកនៃស៊េរីធរណីមាត្រអនន្ត :

គ្រប់ស៊េរីធរណីមាត្រអនន្ត $\mathbf{a + ar + ar^2 + ar^3 + ... + ar^{n-1} + ...}$

ដែល $\mathbf{a \ne 0}$ ជាស៊េរីរួម ឬ រីកទៅតាមករណីដូចខាងក្រោម :

ក-បើ $\mathbf{|r| < 1}$ នោះស៊េរីរួមទៅរក $\mathbf{\dfrac{a}{1-r}}$ ។

ខ-បើ $\mathbf{|r| \ge 1}$ នោះស៊េរីរីក ។

១២_ភាពជាប់នៃអនុគមន៍ត្រង់មួយចំនុច

✍ និយមន័យ ៖

អនុគមន៍ $y = f(x)$ ជាប់ត្រង់ចំនុច $x = c$ កាលណា f បំពេញលក្ខខណ្ឌទាំងបីដូចខាងក្រោម

1- f កំណត់ចំពោះ $x = c$

2- f មានលីមីតកាលណា $x \to c$

3- $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$

១៣_លក្ខណៈនៃអនុគមន៍ជាប់

បើ f និង g ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $x = c$ នោះគេបាន

១. $f(x) \pm g(x)$ ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $x = c$

២. $f(x).g(x)$ ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $x = c$

៣. $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $x = c$ ដែល $g(c) \neq 0$ ។

១៤_ភាពជាប់លើចន្លោះ

✍ និយមន័យ ៖

-អនុគមន៍ f ជាប់លើចន្លោះបើក (a, b) លុះត្រាតែ f ជាប់ចំពោះគ្រប់តម្លៃ x នៃចន្លោះបើនោះ ។

-អនុគមន៍ f ជាប់លើចន្លោះបិទ $[a,b]$ លុះត្រាតែ f ជាប់ លើចន្លោះ

បើក (a,b) និងមានលីមីត $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=f(a)$; $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=f(b)$

(អនុគមន៍ f ជាប់ត្រង់ a ខាងស្តាំ ជាប់ត្រង់ b ខាងឆ្វេង)

១៥_ភាពជាប់នៃអនុគមន៍បណ្តាក់

បើអនុគមន៍ g ជាប់ត្រង់ $x=c$ និងអនុគមន៍ f ជាប់ត្រង់ $g(c)$

នោះអនុគមន៍បណ្តាក់ $(f\circ g)(x)=f\left[\ g(x)\ \right]$ ជាប់ត្រង់ c ។

១៦_អនុវត្តន៍ អនុគមន៍បន្លាយតាមភាពជាប់

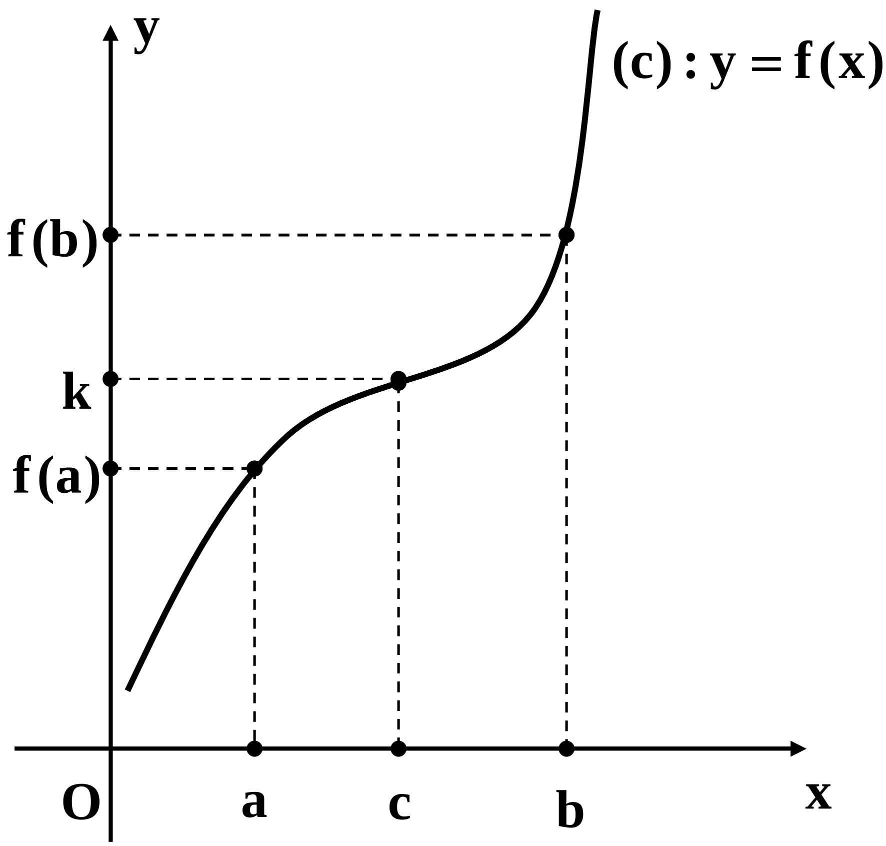
បើ f ជាអនុគមន៍មិនកំនត់ត្រង់ $x=a$ និងមានលីមីត $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$

នោះអនុគមន៍បន្លាយនៃ f តាមភាពជាប់ត្រង់ $x=a$ កំនត់ដោយ

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & \text{បើ}\quad x\neq a \\ L & \text{បើ}\quad x=a \end{cases}$$

១៧-ទ្រឹស្តីបទតម្លៃកណ្តាល

ទ្រឹស្តីបទ : បើអនុគមន៍ f ជាប់លើចន្លោះបិទ $[a , b]$ និង k ជាចំនួនមួយនៅចន្លោះ $f(a)$ និង $f(b)$ នោះមានចំនួនពិត c មួយយ៉ាងតិចក្នុងចន្លោះបិទ $[a , b]$ ដែល $f(c) = k$ ។



ជំពូកទី០៩

ដេរីវេនៃអនុគមន៍

១_ដេរីវេនៃអនុគមន៍ត្រង់ x_0

✍ និយមន័យ :

ដេរីវេនៃអនុគមន៍ $y = f(x)$ ជាលីមីត (បើមាន) នៃផលធៀប

កំនើន $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ កាលណា Δx ខិតទៅជិត 0 ។

គេកំនត់សរសេរ

$$y'_0 = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

២_ភាពមានដេរីវេ និង ភាពជាប់

សន្មតថាអនុគមន៍ $f(x)$ កំនត់លើចន្លោះ I ហើយ x_0 ជាចំនួនពិតនៅក្នុង

ចន្លោះ I និង h ជាចំនួនពិតមិនសូន្យដែល $x_0 + h$ ជារបស់ I ។

-ចំនួនដេរីវេឆ្វេងត្រង់ចំនួន x_0 នៃអនុគមន៍ $f(x)$ កំនត់ដោយ

$$f'_-(x_0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \text{ ។}$$

-ចំនួនដេរីវេស្តាំត្រង់ចំនួន x_0 នៃអនុគមន៍ $f(x)$ កំនត់ដោយ

$$f'_+(x_0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \text{ ។}$$

-ដេរីវេនៃអនុគមន៍ $f(x)$ ត្រង់ x_0 បើមាន កំនត់ដោយ

$$\boxed{f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}$$

ហើយ $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ មានកាលណា

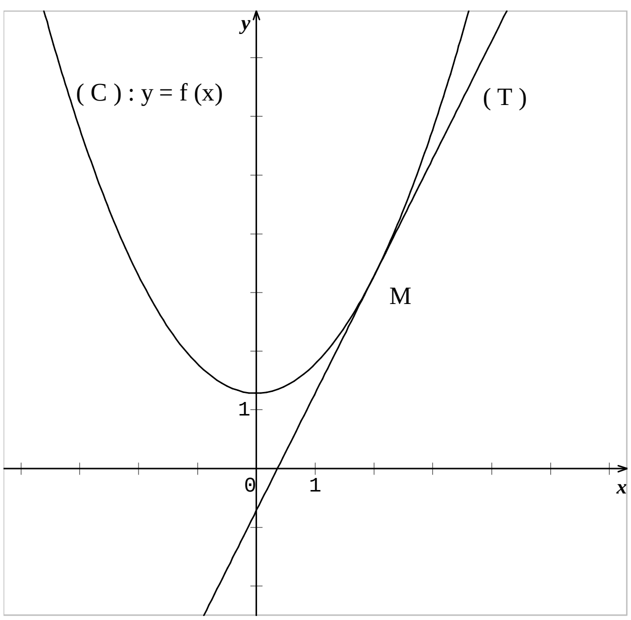
$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$ ។

៣_អនុគមន៍ដេរីវេ

ក. និយមន័យ

-បើ**f** ជាអនុគមន៍មួយកំនត់លើចន្លោះ**I** និងមានដេរីវេត្រង់គ្រប់ចំនុច នៅក្នុងចន្លោះ **I** នោះគេថាអនុគមន៍ **f** មានដេរីវេលើចន្លោះ **I** ។

-អនុគមន៍ដែលគ្រប់ $x\in I$ ផ្សំបានចំនួនដេរីវេនៃ **f** ត្រង់ **x** ហៅថា អនុគមន៍ដេរីវេនៃ **f** ដែលគេកំនត់សរសេរ $f: x \mapsto f'(x)$ ។



ចំនួនដេរីវេនៃអនុគមន៍ $f(x)$ ត្រង់ចំនុច x_0 គឺជាមេគុណប្រាប់ទិសនៃ

បន្ទាត់ប៉ះនឹងខ្សែកោង $(c): y = f(x)$ ត្រង់ចំនុចមានអាប់ស៊ីស $x = x_0$
ហើយសមីការបន្ទាត់ប៉ះនោះកំនត់ដោយ ÷

$$\boxed{(T): y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)}$$ ។

៤_ដេរីវេនៃអនុគមន៍បណ្ដាក់

បើ $y = f(u)$ និង $u = g(x)$ នោះគេបាន

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = y' \times u' \quad \text{ឬ} \quad \frac{d}{dx} f[u(x)] = f'(u) \times u'(x)$$

៥_រូបមន្តដេរីវេនៃអនុគមន៍

អនុគមន៍	ដេរីវេ
1. $y = k$	$y' = 0$
2. $y = x^n$	$y' = n x^{n-1}$
3. $y = \frac{1}{x}$	$y' = -\frac{1}{x^2}$
4. $y = \sqrt{x}$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
5. $y = e^x$	$y' = e^x$
6. $y = a^x$	$y' = a^x \ln a$
7. $y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$
8. $y = \sin x$	$y = \cos x$
9. $y = \cos x$	$y' = -\sin x$

10. $y = \tan x$ $\quad y' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$

11. $y = \cot x$ $\quad y' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \cot^2 x)$

12. $y = \arcsin x$ $\quad y' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

13. $y = \arccos x$ $\quad y' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

14. $y = \arctan x$ $\quad y' = \frac{1}{1 + x^2}$

✱ ជាទូទៅ

អនុគមន៍	ដេរីវេ
1. $y = u^n$	$y' = n.u'.u^{n-1}$
2. $y = \sqrt{u}$	$y' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
3. $y = u.v$	$y' = u'v + v'u$
4. $y = \frac{u}{v}$	$y' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$
5. $y = \ln u$	$y' = \frac{u'}{u}$
6. $y = \sin u$	$y' = u'.\cos u$
7. $y = \cos u$	$y' = -u'\sin u$
8. $y = e^u$	$y' = u'.e^u$
9. $y = \tan u$	$y' = u'(1 + \tan^2 u)$
10. $y = \arcsin u$	$y' = \frac{u'}{\sqrt{1 - u^2}}$

11. $y = \arccos u$ $\qquad y' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

12. $y = \arctan u$ $\qquad y' = \dfrac{u'}{1+u^2}$

13. $y = u^V$ $\qquad y' = u^V\left(v'\ln u + v\dfrac{u'}{u} \right)$

៦_ដេរីវេលំដាប់ខ្ពស់

បើអនុគមន៍ $y = f(x)$ មានដេរីវេបន្តបន្ទាប់ដល់លំដាប់ n

នោះ $y^{(n)} = f^{(n)}(x)$ ហៅថាដេរីវេទី n នៃអនុគមន៍ $y = f(x)$

ហើយ $f^{(n)}(x) = \dfrac{d}{dx} f^{(n-1)}(x)$ ។

៧_ល្បឿននៃចលនា

✍ និយមន័យ :

ល្បឿននៃចលនាមួយនៅខណៈ t គឺ $V(t) = S'(t) = \dfrac{dS}{dt}$

ដែល $S(t)$ ជាចម្ងាយនៅខណៈ t ។

៨_សំទុះនៃចលនា

សំទុះនៃចលនាមួយនៅខណៈ t គឺ $a(t) = \dfrac{dV(t)}{dt} = V'(t)$

ដែល $V(t)$ ជាល្បឿននៃចលនានៅខណៈ t ។

៩_អនុគមន៍អសនិទាន

.អនុគមន៍ $y=\sqrt{ax+b}$ ដែល $a\neq 0$

ដែនកំណត់ : អនុគមន៍មានន័យកាលណា $ax+b\geq 0$

-បើ $a>0$ នោះ $x\geq -\frac{b}{a}$ ហើយ $D=[-\frac{b}{a},+\infty)$

-បើ $a<0$ នោះ $x\leq -\frac{b}{a}$ ហើយ $D=(-\infty\ ,\ -\frac{b}{a}]$

ដេរីវេ $y'=\frac{a}{2\sqrt{ax+b}}$

-បើ $a<0$ នោះ $y'<0$ នាំឱ្យអនុគមន៍ចុះជានិច្ចលើដែនកំណត់ ។

-បើ $a>0$ នោះ $y'>0$ នាំឱ្យអនុគមន៍កើនជានិច្ចលើដែនកំណត់ ។

.អនុគមន៍ $y=\sqrt{ax^2+bx+c}$ មាន $\Delta=b^2-4ac$

◆ដែនកំណត់ : អនុគមន៍មានន័យកាលណា $ax^2+bx+c\geq 0$

_ករណី $a>0$

ក្រាបនៃ $y=ax^2+bx+c$ មានអាស៊ីមតូតទ្រេតពីរគឺ

ក-បើ $x\to+\infty$ នោះ $y=\sqrt{a}(x+\frac{b}{2a})$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត ។

ក-បើ $x\to-\infty$ នោះ $y=-\sqrt{a}(x+\frac{b}{2a})$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត

_ករណី $a<0$

ក្រាបនៃអនុគមន៍ $\mathbf{y=\sqrt{ax^2+bx+c}}$ គ្មានអាស៊ីមតូតទេ ។

◆ដេរីវេ $\mathbf{y'=\dfrac{2ax+b}{2\sqrt{ax^2+bx+c}}}$ មានសញ្ញាដូច $\mathbf{2ax+b}$

-បើ $\mathbf{a<0}$ អនុគមន៍មានអតិបរមាមួយត្រង់ $\mathbf{x=-\dfrac{b}{2a}}$ ។

-បើ $\mathbf{a>0}$ អនុគមន៍មានអប្បបរមាមួយត្រង់ $\mathbf{x=-\dfrac{b}{2a}}$ ។

១០_អនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រច្រាស

.ចំណុចសំខាន់ៗសម្រាប់សិក្សាអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ

-ដែនកំណត់

-ខួបនៃះនុគមន៍

-ភាពគូសេសនៃអនុគមន៍

-ទិសដៅអថេរភាពនៃអនុគមន៍

.ខួបនៃអនុគមន៍

-ខួបនៃអនុគមន៍ $\mathbf{y=\sin(ax)}$ គឺ $\mathbf{\dfrac{2\pi}{|a|}}$

-ខួបនៃអនុគមន៍ $\mathbf{y=\cos(ax)}$ គឺ $\mathbf{\dfrac{2\pi}{|a|}}$

.ភាពគូសេសនៃអនុគមន៍

-អនុគមន៍ $\mathbf{f(x)}$ ជាអនុគមន៍សេសលើ $\mathbf{I}$ កាលណា $\forall \mathbf{x}\in \mathbf{I}\ ,\ -\mathbf{x}\in \mathbf{I}$

ហើយ $f(-x) = -f(x)$ ។

-អនុគមន៍ $f(x)$ ជាអនុគមន៍គូលើ I កាលណា $\forall x \in I$, $-x \in I$

ហើយ $f(-x) = f(x)$ ។

១១-ទ្រឹស្តីបទ

បើមានពីរចំនួនពិត m និង M ដែលចំពោះគ្រប់

$x \in I : m \le f'(x) \le M$ នោះគ្រប់ចំនួនពិត $a , b \in I$ ដែល $a < b$

គេបាន $m(b-a) \le f(b) - f(a) \le M(b-a)$ ។

◆ គេឱ្យអនុគមន៍ f មានដេរីវេលើចន្លោះ $[a , b]$ ។ បើមានចំនួន M ដែលគ្រប់ $x \in [a,b] : |f'(x)| \le M$ នោះគេបាន :

$|f(b) - f(a)| \le M|b-a|$ ។

◆ បើ f ជាអនុគមន៍ជាប់លើចន្លោះ $[a , b]$ មានដេរីវេលើ

ចន្លោះ (a , b) និង $f(a) = f(b)$ នោះមានចំនួន $c \in (a,b)$ មួយ

យ៉ាងតិចដែល $f'(c) = 0$ ។

◆ បើ f ជាអនុគមន៍ជាប់លើចន្លោះ $[a , b]$ មានដេរីវេលើ

ចន្លោះ (a , b) នោះមានចំនួន $c \in (a,b)$ មួយយ៉ាងតិច

ដែល $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a}$ ។

ជំពូកទី១០ អាំងតេក្រាល

១_អាំងតេក្រាលមិនកំណត់

ព្រីមីទីវ

ក. និយមន័យ

សន្មតថា $f(x)$ ជាអនុគមន៍កំនត់លើចន្លោះ I ។

គេថា $F(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃ $f(x)$ លើចន្លោះ I កាលណា

$F'(x)=f(x)$ គ្រប់ $x\in I$ ។

ឧទាហរណ៍១ អនុគមន៍ $F(x)=x^3$ ជាព្រីមីទីវមួយនៃអនុគមន៍

$f(x)=3x^2$ លើចន្លោះ $]-\infty\,,+\infty[$

ពីព្រោះ $F'(x)=3x^2=f(x)$ ចំពោះគ្រប់ $x\in\,]-\infty\,,+\infty[$

ឧទាហរណ៍២ អនុគមន៍ $F(x)=\sin x$ ជាព្រីមីទីវមួយនៃអនុគមន៍

$f(x)=\cos x$ លើចន្លោះ $]-\infty\,,+\infty[$

ពីព្រោះ $F'(x)=\cos x=f(x)$ ចំពោះគ្រប់$x\in\,]-\infty\,,+\infty[$ ។

ឧទាហរណ៍៣ អនុគមន៍ $F(x)=\ln x$ ជាព្រីមីទីវមួយនៃអនុគមន៍

$f(x)=\dfrac{1}{x}$ លើចន្លោះ $]\,0,+\infty\,[$

ពីព្រោះ $F'(x)=\dfrac{1}{x}=f(x)$ ចំពោះគ្រប់ $x\in\,]0\,,+\infty\,[$ ។

១. ទ្រឹស្តីបទ

បើអនុគមន៍ $F(x)$ និង $G(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍ $f(x)$ លើចន្លោះ I នោះគេមាន $F(x) = G(x) + c$ ចំពោះគ្រប់$x \in I$ ។ ដែល c ជាចំនួនថេរ ។

✍ អាំងតេក្រាលមិនកំនត់

ក. និយមន័យ បើអនុគមន៍ $F(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍ $f(x)$ នោះអាំងតេក្រាលមិនកំនត់នៃអនុគមន៍ $f(x)$ កំនត់ដោយ $\int f(x).dx = F(x) + c$ ដែល c ជាចំនួនថេរ ។

ខ. ទ្រឹស្តីបទ

សន្មតថា $f(x)$ និង $g(x)$ ជាអនុគមន៍ពីរមានព្រីមីទីវលើចន្លោះរួម I គេមាន ÷

$a/ \quad \int [\ f(x) + g(x)\ ]dx = \int f(x).dx + \int g(x).dx$

$b/ \quad \int [\ k.f(x)]dx = k \int f(x).dx$

✍ រូបមន្តអាំងតេក្រាលសំខាន់ៗ

១. $\int k\ .dx = kx + c$

២. $\int x^n.dx = \frac{1}{n+1}.x^{n+1} + c \quad , \ n \neq -1$

៣. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$

៤. $\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + c$

៥. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + c$

៦. $\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + c$

៧. $\int \frac{dx}{\sqrt{ax+b}} = \frac{2}{a}\sqrt{ax+b} + c$

៨. $\int e^{x}dx = e^{x} + c$

៩. $\int e^{ax}.dx = \frac{1}{a}e^{ax} + c$

១០. $\int a^{x}.dx = \frac{1}{\ln a}.a^{x} + c$

១១. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + c$

១២. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + c$

១៣. $\int \sin x.dx = -\cos x + c$

១៤. $\int \cos x.dx = \sin x + c$

១៥. $\int \tan x.dx = -\ln|\cos x| + c$

១៦. $\int \cot x.dx = \ln|\sin x| + c$

១៧. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}.\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c$

១៨. $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + c$

១៩. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln|x+\sqrt{x^2+a^2}| + c$

២០. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+c$

២១. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\left(\dfrac{x}{a}\right)+c$

២២. $\int \sqrt{x^2+a^2}.dx = \dfrac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2}+\dfrac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{x^2+a^2}|+c$

២៣. $\int \sqrt{x^2-a^2}.dx = \dfrac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}-\dfrac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+c$

២៤. $\int \sqrt{a^2-x^2}.dx = \dfrac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\dfrac{a^2}{2}\arcsin\left(\dfrac{x}{a}\right)+c$

✍ វិធីប្តូរអថេរក្នុងអាំងតេក្រាលមិនកំនត់

១-ឧបមាថាគេមានអាំងតេក្រាល $I=\int f[g(x)].g'(x).dx$

បើគេតាង $u=f(x)$ នោះ $du=f'(x).dx$

គេបាន $I=\int f[g(x)].g'(x).dx=\int f(u).du=F(u)+c$ ។

២-ឧបមាថាគេមានអាំងតេក្រាល$I=\int f(x).dx$

តាង $x=\varphi(t)$ នោះ $dx=\varphi'(t).dt$

គេបាន $I=\int f(x).dx=\int f[\varphi(t)].\varphi'(t).dt$ ។

៣-រូបមន្តគ្រឹះ

ក- $\int k\ P'(x).dx = k.P(x)+c$

ខ- $\int [P(x)]^n.P'(x).dx = \frac{1}{n+1}.P^{n+1}(x)+c \quad , \ n \neq -1$

គ- $\int \frac{P'(x)}{P(x)}.dx = \ln|P(x)|+c$

ឃ- $\int \frac{P'(x)}{\sqrt{P(x)}}.dx = 2\sqrt{P(x)}+c$

ង- $\int e^{P(x)}.P'(x).dx = e^{P(x)}+c$

ច- $\int \frac{P'(x)}{P^2(x)}.dx = -\frac{1}{P(x)}+c$

✍ **អាំងតេក្រាលដោយផ្នែក**

បើគេមាន $u = f(x)$ និង $v = g(x)$ គេបាន ÷

$\int u.dv = u.v - \int v.du$ ។

២-អាំងតេក្រាលកំណត់

.និយមន័យ

f ជាអនុគមន៍ជាប់លើចន្លោះ $[a,b]$ ។

អាំងតេក្រាលកំណត់ពី **a** ទៅ **b** នៃ $y = f(x)$ កំណត់ដោយ

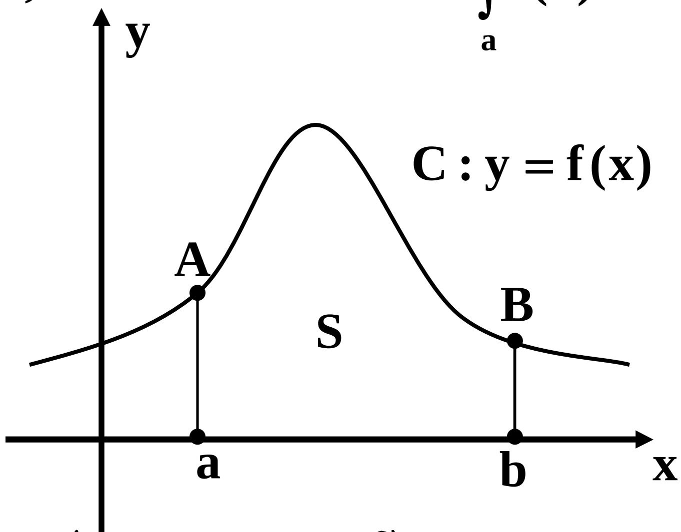
$\int_a^b f(x).dx = F(b)-F(a)$ ដែល $F'(x) = f(x)$ ។

.ផ្ទៃក្រឡានៃផ្នែកប្លង់

-បើអនុគមន៍ $y = f(x)$ ជាប់លើចន្លោះ $[a,b]$ នោះផ្ទៃក្រឡា

នៃផ្នែកប្លង់ដែលខណ្ឌដោយខ្សែកោង អក្ស័អាប់ស៊ីស បន្ទាត់ឈរ

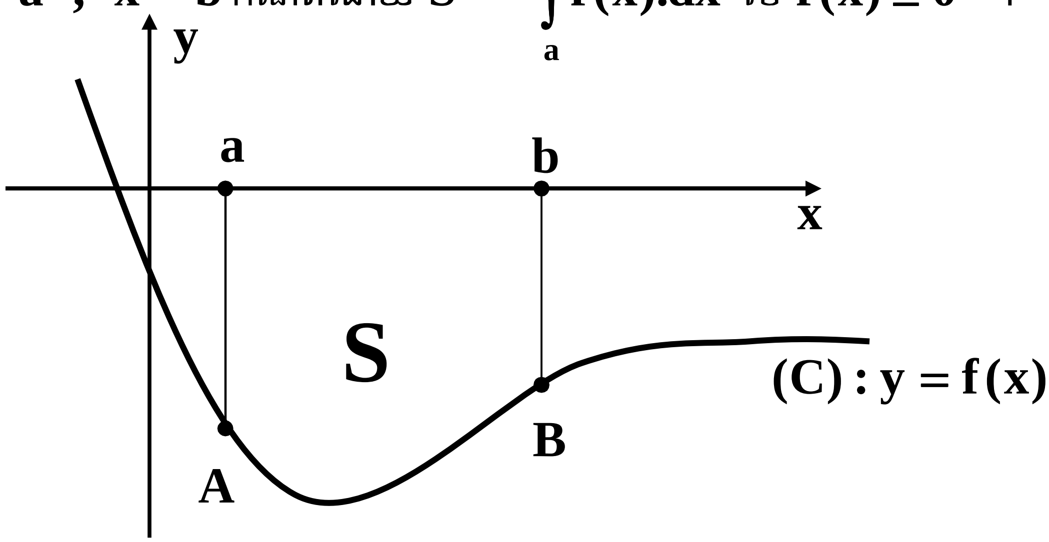
$x = a$, $x = b$ កំណត់ដោយ $S = \int_a^b f(x).dx$ បើ $f(x) \geq 0$



-បើអនុគមន៍ $y = f(x)$ ជាប់លើចន្លោះ $[a, b]$ នោះផ្ទៃក្រឡា

នៃផ្ទៃកប្លង់ដែលខណ្ឌដោយខ្សែកោង អក្ស័អាប់ស៊ីស បន្ទាត់ឈរ

$x = a$, $x = b$ កំណត់ដោយ $S = -\int_a^b f(x).dx$ បើ $f(x) \leq 0$ ។

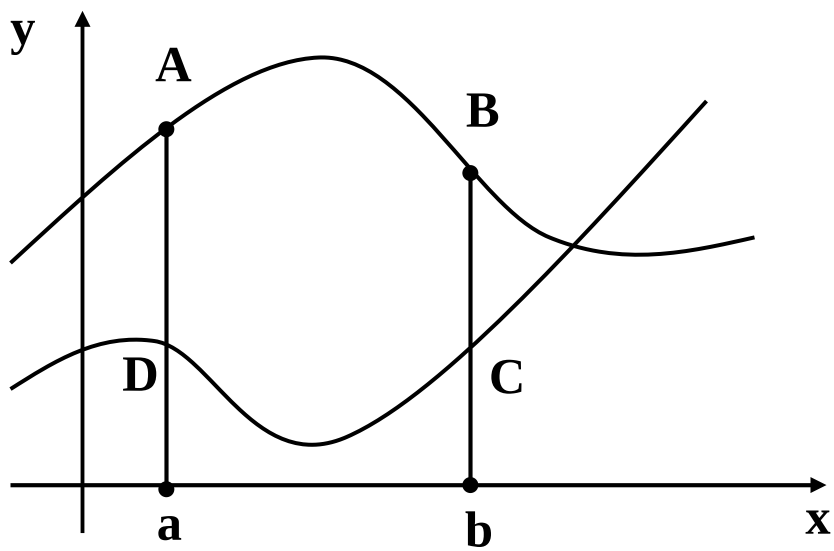


-បើ f និង g ជាអនុគមន៍ជាប់លើ $[a, b]$ នោះគេបានផ្ទៃក្រឡា

នៅចន្លោះខ្សែកោងតាងអនុគមន៍ទាំងពីរកំណត់ដោយ :

$$S=\int_a^b[f(x)-g(x)].dx$$

ដែល $f(x)\ge g(x)$ គ្រប់ $x\in[a,b]$ ។



៣_មាឌសូលីដ និង ប្រវែងធ្នូ

◆បើអនុគមន៍ f វិជ្ជមានហើយជាប់លើចន្លោះ $[a,b]$ នោះមាឌនៃសូលីដបរិវត្តន៍បានពីរង្វិលជុំវិញអក្សអាប់ស៊ីសនៃផ្ទៃដែលខណ្ឌដោយក្រាបតាងអនុគមន៍ $y=f(x)$ អក្សអាប់ស៊ីស បន្ទាត់ឈរ $x=a$ និង $x=b$ កំណត់ដោយ $V=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\left[\pi f^2(x_k).\Delta x\right]=\pi\int_a^b f^2(x).dx$ ។

◆មាឌនៃសូលីដបរិវត្តកំណត់បានពីរង្វិលជុំវិញអក្ស (ox) នៃផ្ទៃខណ្ឌដោយ ក្រាប $y=f(x)$ និង $y=g(x)$ លើចន្លោះ $[a,b]$

ដែល$f(x) \geq g(x)$ កំណត់ដោយ $V = \pi \int_a^b \left[f^2(x) - g^2(x)\right].dx$ ។

◆ អនុគមន៍ F ដែលកំណត់លើចន្លោះ $[a, b]$ ដោយ $F(x) = \int_a^x f(t).dt$

ហៅថាអនុគមន៍កំណត់តាមអាំងតេក្រាលកំណត់ ។

◆ តម្លៃមធ្យមនៃ f កំណត់ជាប់លើ $[a, b]$ គឺ $y_m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x).dx$

◆ ប្រវែងធ្នូនៃក្រាបតាងf លើ$[a, b]$ គឺ$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}.dx$

ជំពូកទី១១

សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

១_សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់ទី១

សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់ទី 1 មានរាងទូទៅ

- $\frac{dy}{dx} = f(x)$ មានចម្លើយទូទៅ $y = \int f(x).dx + c$
- $g(y).\frac{dy}{dx} = f(x)$ មានចម្លើយទូទៅ $G(y) = F(x) + C$

  ដែល $G(y) = \int g(y).dy$ ។
- $y' + ay = 0$ ឬ $\frac{dy}{dx} + ay = 0$ មានចម្លើយទូទៅ $y = A.e^{-ax}$

  ដែល A ជាចំនួនថេរ ។
- $y' + ay = p(x)$ មានចម្លើយទូទៅ $y = y_e + y_p$ ដែល y_e ជាចម្លើយនៃសមីការ $y' + ay = 0$ និង y_p ជាចម្លើយពិសេសមួយនៃសមីការ $y' + ay = p(x)$ ។

២_សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់ទី២

ក_សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែលំដាប់២

និយមន័យ :

សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែលំដាប់ទី២ អូម៉ូសែន និងមានមេគុណជាចំនួនថេរជាសមីការដែលអាចសរសេរជារាងទូទៅ :ឧ

$\mathbf{ay''+by'+cy=0}$ ដែល $\mathbf{a\neq 0}$, $\mathbf{a,b,c\in IR}$ ។

ខ_ដំណោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់ទី២

-សមីការសម្គាល់

សមីការសម្គាល់នៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែលំដាប់ទី២ អូម៉ូសែន និងមានមេគុណជាចំនួនថេរ $\mathbf{ay''+by'+cy=0}$ ជាសមីការដឺក្រេទីពីរ$\mathbf{a\lambda^2+b\lambda+c=0}$ដែល $\mathbf{a\neq 0}$, $\mathbf{a,b,c\in IR}$

-វិធីដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែលំដាប់២

ឧបមាថាគេមានសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែលំដាប់2ដូចខាងក្រោម:

$\mathbf{(E):\ \ y''+by'+cy=0}$ ដែល $\mathbf{b\ ,\ c\in IR}$ ។

◆សមីការ $\mathbf{(E)}$ មានសមីការសម្គាល់ $\mathbf{\lambda^2+b\lambda+c=0\ (1)}$

◆គណនា $\mathbf{\Delta=b^2-4c}$

-ករណី $\mathbf{\Delta>0}$ សមីការ $\mathbf{(1)}$ មានឫសពីរជាចំនួនពិតផ្សេងគ្នាគឺ

$\lambda_1 = \alpha$ និង $\lambda_2 = \beta$ នោះសមីការ **(E)** មានចម្លើយទូទៅ

ជាអនុគមន៍រាង $\mathbf{y = A.e^{\alpha x} + B.e^{\beta x}}$

ដែល **A , B** ជាចំនួនថេរមួយណាក៏បាន ។

-ករណី $\Delta = 0$ សមីការ **(1)** មានឬសឌុបគឺ $\lambda_1 = \lambda_2 = \alpha$

នោះសមីការ **(E)** មានចម្លើយទូទៅជាអនុគមន៍រាង

$$\mathbf{y = Ax.e^{\alpha x} + B.e^{\alpha x}}$$

ដែល **A , B** ជាចំនួនថេរមួយណាក៏បាន ។

-ករណី $\Delta < 0$ សមីការ **(1)** មានឬសពីរផ្សេងគ្នា

ជាចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់គ្នាគឺ $\lambda_1 = \alpha + i.\beta$ និង $\lambda_2 = \alpha - i.\beta$

($\alpha , \beta \in IR$) នោះសមីការ **(E)** មានចម្លើយទូទៅជាអនុគមន៍រាង

$$\mathbf{y = (A\cos\beta x + B\sin\beta x)e^{\alpha x}}$$

ដែល **A , B** ជាចំនួនថេរមួយណាក៏បាន ។

គ_ដំណោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់ទី២មិនអូម៉ូសែន

ឧបមាថាគេមានសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែលំដាប់ទី2មិនអូម៉ូសែន

$\mathbf{y'' + by' + cy = P(x)}$ ដែល $\mathbf{P(x) \neq 0}$ ។

ដើម្បីដោះស្រាយសមីការនេះគេត្រូវ **:**

◆ស្វែងរកចម្លើយពិសេសមិនអូម៉ូសែន តាងដោយ $\mathbf{y_P}$

របស់សមីការ $y''+by'+cy = P(x)$ ដែល y_P មានទម្រង់ដូច $P(x)$ ។

◆ រកចម្លើយទូទៅតាងដោយ y_c នៃសមីការលីនេអ៊ែ

លំដាប់ទី2អូម៉ូសែន $y''+by'+cy = 0$ ។

◆ គេបានចម្លើយទូទៅនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែលំដាប់ទី2

មិនអូម៉ូសែនជាផលបូករវាង y_P និង y_c គឺ $y = y_P + y_C$ ។

ជំពូកទី១២ វ៉ិចទ័រក្នុងលំហ

១-វ៉ិចទ័រក្នុងលំហ

ក/ និយមន័យ

អង្កត់មានទិសដៅ **AB** នៅក្នុងលំហហៅថាវ៉ិចទ័រក្នុងលំហដែលមាន **A** ជាគល់និង **B** ជាចុង។

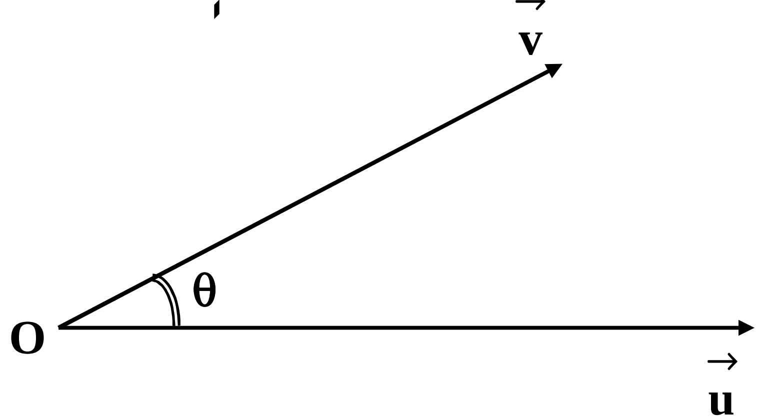
គេកំនត់សរសេរដោយ $\overrightarrow{AB}$ ។

ខ/ កូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រក្នុងលំហ

ក្នុងលំហប្រកបដោយតម្រុយ $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ចំពោះគ្រប់ចំនុច **P** មានត្រីធាតុ (a,b,c) តែមួយគត់ដែល $\overrightarrow{U} = \overrightarrow{OP} = a.\vec{i} + b.\vec{j} + c.\vec{k}$ ។ ត្រីធាតុ (a,b,c) ហៅថាកូអរដោនេនៃចំនុច **P** ដែលគេសរសេរ $P(a,b,c)$ ។

២-ផលគុណស្កាលែនៃវ៉ិចទ័រក្នុងលំហ

ក/ និយមន័យ



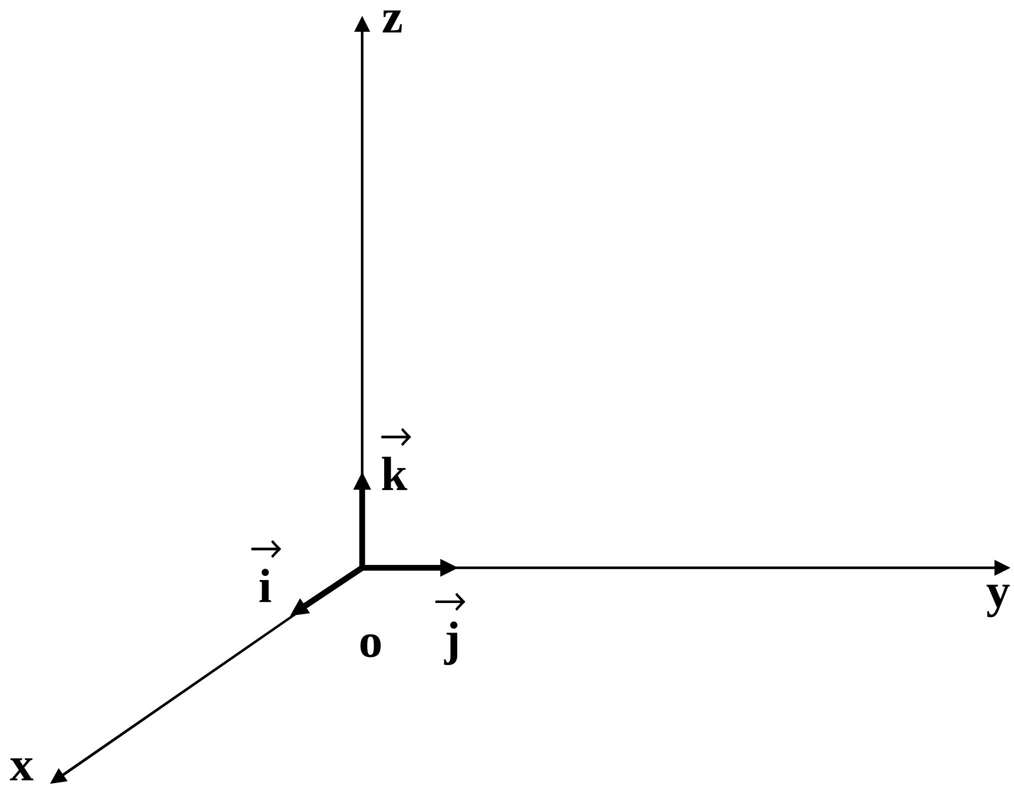
- ផលគុណស្កាលែនៃពីរវ៉ិចទ័រ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ គឺជាចំនួនពិត

កំនត់ដោយ $\vec{u}.\vec{v} = |\vec{u}|.|\vec{v}|\cos\theta$ ។

(θ ជាមុំរវាងវ៉ិចទ័រ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$)

– បើ $\vec{u} = 0$ ឬ $\vec{v} = 0$ នោះ $\vec{u}.\vec{v} = 0$ ។

ខ/គោល និង តម្រុយអរតូណរម៉ាល់



គេហៅគោលអរតូណរម៉ាល់នៃវ៉ិចទ័រ គឺគ្រប់ត្រីធាតុ

$(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ដែល $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$

និង $\vec{i}.\vec{j} = \vec{j}.\vec{k} = \vec{k}.\vec{i} = 0$ ។

គ/ ទ្រឹស្តីបទ

ក្នុងគោលអរត្វូណរម៉ាល់នៃលំហផលគុណស្កាលែរវាង

ពីរវ៉ិចទ័រ $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ និង $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ គឺជាចំនួន

ពិតកំនត់ដោយ $\vec{u}.\vec{v} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$ ។

ឃ/ ក្តួរលែ

-ពីរវ៉ិចទ័រ $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ និង $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$

អរត្វូកូណាល់គ្នាលុះត្រាតតែ $\vec{u}.\vec{v} = 0$ បានន័យថា

$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$ ។

–ស្កាលែ និង ណមនៃវ៉ិចទ័រ $\vec{u} = (a, b, c)$ កំនត់ដោយ

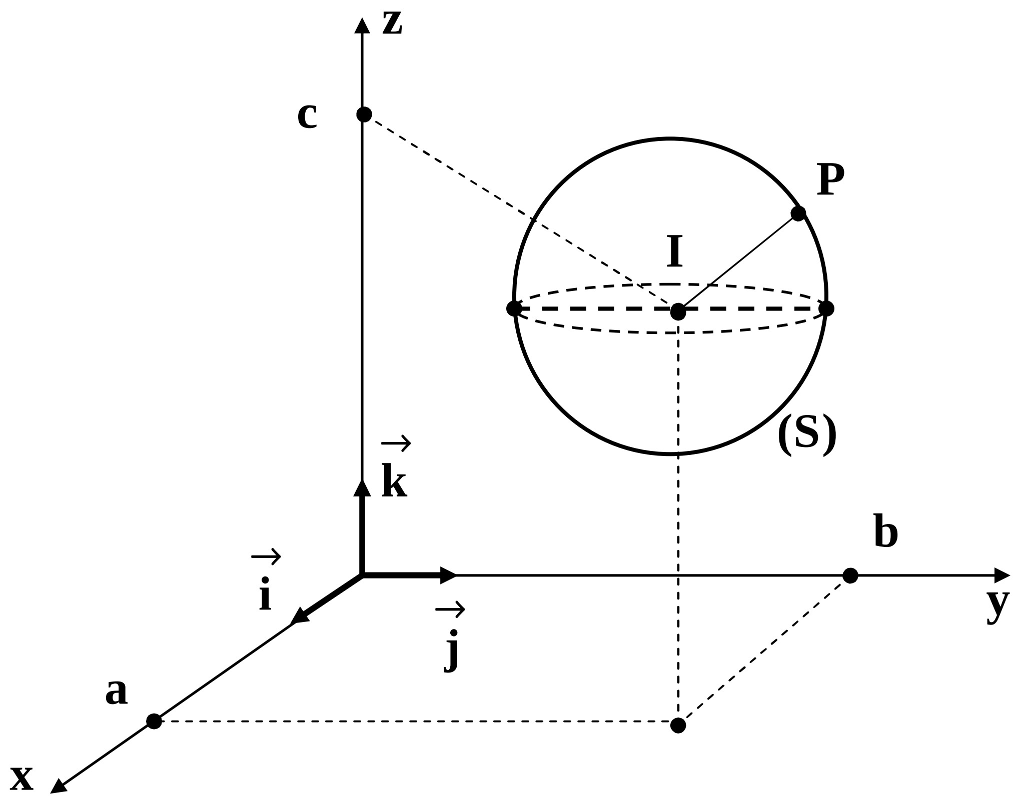
$(\vec{u})^2 = a^2 + b^2 + c^2$ និង $|\vec{u}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ ។

–មុំរវាងពីរវ៉ិចទ័រ $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ និង $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$

កំនត់ដោយ $\vec{u}.\vec{v} = |\vec{u}|.|\vec{v}|\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \dfrac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{u}|.|\vec{v}|}$

ឬ $\cos\theta = \dfrac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{{x_1}^2 + {y_1}^2 + {z_1}^2}.\sqrt{{x_2}^2 + {y_2}^2 + {z_2}^2}}$ ។

៣-សមីការស្វ៊ែក្នុងលំហ

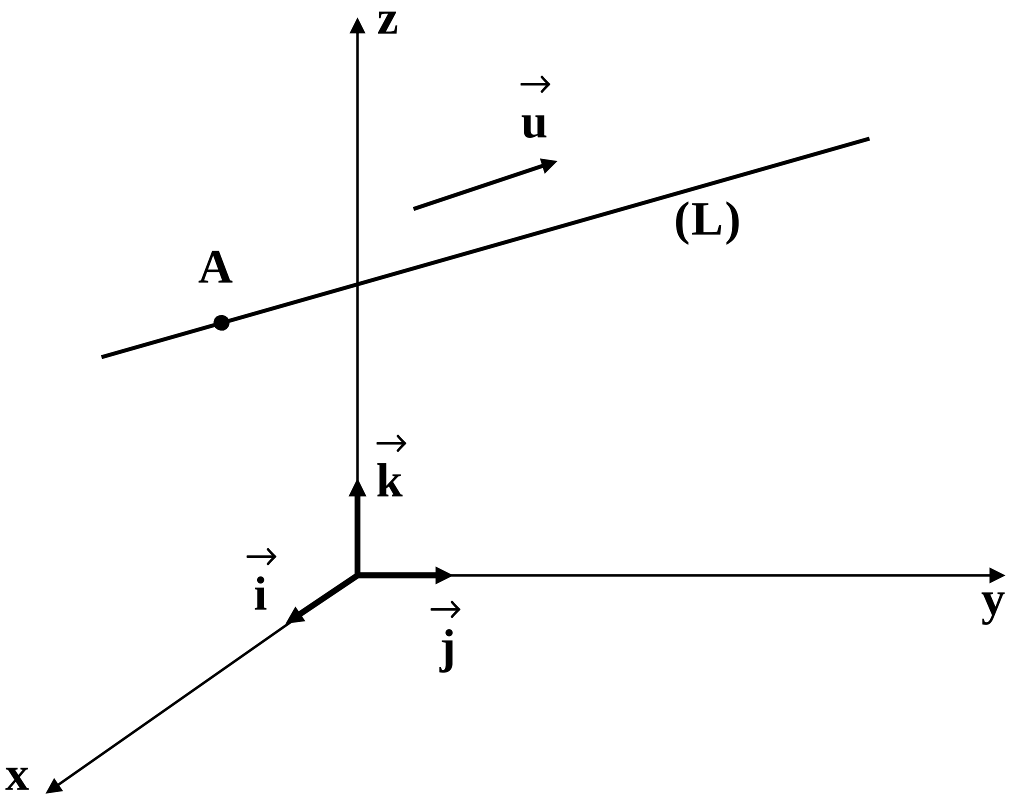


និយមន័យ

សំណុំនៃចំនុច **P(x , y , z)** ដែលមានចម្ងាយថេរ ស្មើ **R** ពីចំនុចនឹង **I(a ; b ; c)** ហៅថាស្វ៊ែផ្ចិត **I** កាំ **R**។ សមីការរបស់ស្វ៊ែនេះគឺ

$(S) : (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$ ។

៨-សមីការបន្ទាត់ក្នុងលំហ



សមីការបន្ទាត់ (L) កាត់តាមចំនុច $A(x_A , y_A , z_A)$ ហើយមានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{u}(a , b , c)$ កំនត់ដោយ

$$(L):\begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \quad ; \ t \in IR \end{cases}$$ (ហៅថាសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត)

$$(L): \frac{x - x_A}{a} = \frac{y - y_A}{b} = \frac{z - z_A}{c}$$ (ហៅថាសមីការឆ្លុះ)

៥-សមីការប្លង់ក្នុងតម្រុយអរតូណារម៉ាល់

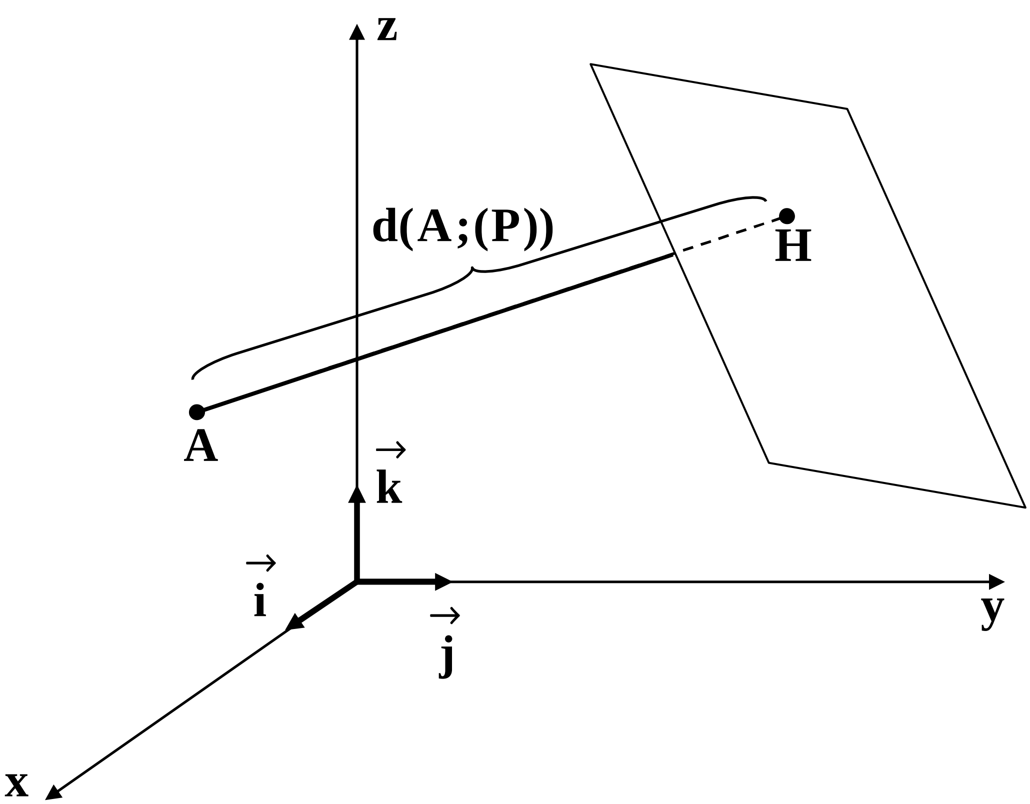
ក/សមីការប្លង់កាត់តាមចំនុចមួយនិងវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់មួយ

សមីការប្លង់កាត់តាមចំនុច $A(x_A , y_A , z_A)$ ហើយមាន

វ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n}(a; b ; c)$ កំនត់ដោយ

$(P) : a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$ ។

ខ/ចម្ងាយពីចំនុចមួយទៅប្លង់មួយក្នុងលំហ



ចម្ងាយពីចំណុច $A(x_A ; y_A ; z_A)$ ទៅប្លង់ (P) ដែល

មានសមីការ $ax+by+cz+d=0$ កំនត់ដោយ

$$d(A\,;(P))=\frac{|ax_A+by_A+cz_A+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$ ។

៦-ផលគុណនៃពីរវ៉ិចទ័រក្នុងលំហ

1.និយមន័យផលគុណនៃពីរវ៉ិចទ័រ

បើ $\vec{u}=u_1.\vec{i}+u_2.\vec{j}+u_3.\vec{k}$ និង $\vec{v}=v_1.\vec{i}+v_2.\vec{j}+v_3.\vec{k}$

ជាវ៉ិចទ័រក្នុងលំហ ។

ផលគុណនៃវ៉ិចទ័រ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ គឺជាវ៉ិទ័រកំណត់ដោយ:

$$\vec{u}\times\vec{v}=(u_2v_3-u_3v_2)\,\vec{i}-(u_1v_3-u_3v_1)\,\vec{j}+(u_1v_2-u_2v_1)\vec{k}$$

ដើម្បីងាយស្រួលក្នុងការគណនាផលគុណនៃពីរវ៉ិចទ័រ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ គេសន្មត

ប្រើដេទែមីណង់លំដាប់បីដូចខាងក្រោម :

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ u_1 & u_2 & u_3\\ v_1 & v_2 & v_3\end{vmatrix}$$

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}u_2 & u_3\\ v_2 & v_3\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}u_1 & u_3\\ v_1 & v_3\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}u_1 & u_2\\ v_1 & v_2\end{vmatrix}\vec{k}$$

2.លក្ខណៈនៃផលគុណនៃពីរវ៉ិចទ័រ

បើ $\vec{u}, \vec{v}$ និង $\vec{w}$ ជាវ៉ិចទ័រក្នុងលំហ និង c ជាចំនួនពិតនោះគេបាន :

ក. $\vec{u}\times\vec{v} = -(\vec{v}\times\vec{u})$

ខ. $\vec{u}\times(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\times\vec{v}+\vec{u}\times\vec{w}$

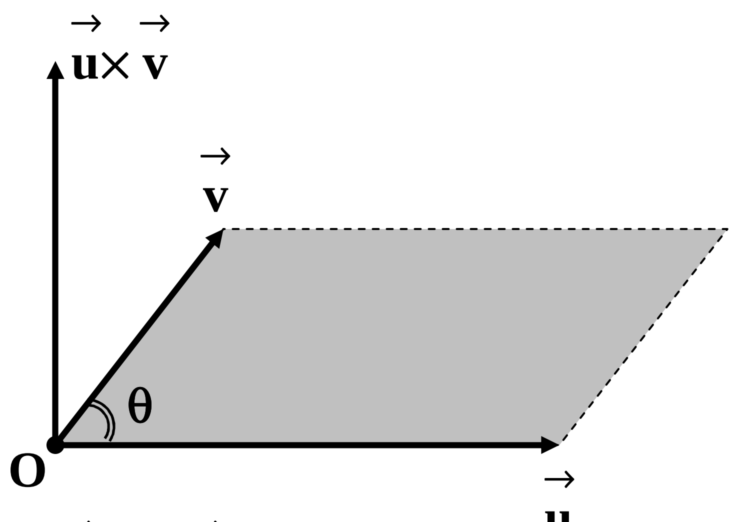
គ. $c(\vec{u}\times\vec{v}) = (c\vec{u})\times\vec{v} = \vec{u}\times(c\vec{v})$

ឃ. $\vec{u}\times\vec{o} = \vec{o}\times\vec{u} = \vec{o}$

ង. $\vec{u}\times\vec{u} = \vec{o}$

ច. $\vec{u}.(\vec{v}\times\vec{w}) = (\vec{u}\times\vec{v}).\vec{w}$

3.បំណកស្រាយនៃផលគុណនៃពីរវ៉ិចទ័រតាមបែបធរណីមាត្រ



បើ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ ជាវ៉ិចទ័រមិនសូន្យនៅក្នុងលំហ និងតាង θ ជាមុំរវាងវ៉ិចទ័រ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ នោះគេបាន :

ក.$\vec{u}\times\vec{v}$ អរតូកូណាល់ទៅនឹង $\vec{u}$ ផង និង $\vec{v}$ ផង ។

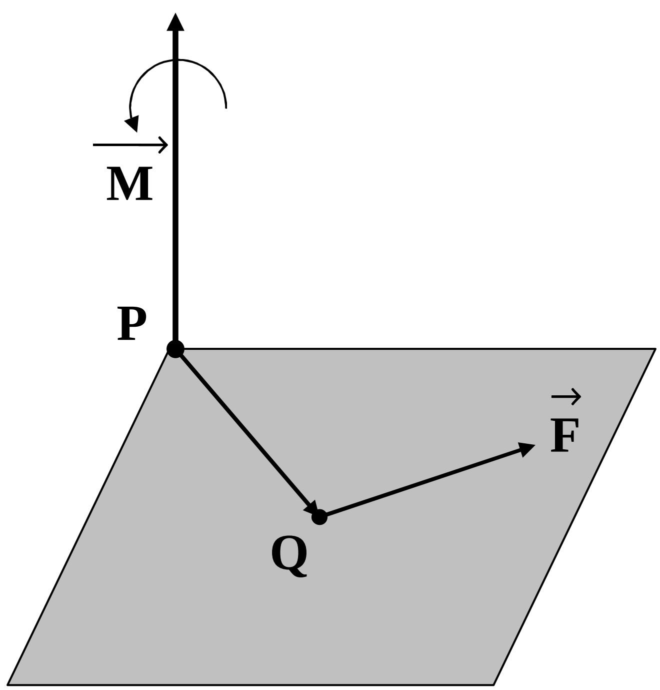
ខ. $|\vec{u}\times\vec{v}|=|\vec{u}|.|\vec{v}|.\sin\theta$

គ. បើ $\vec{u}\times\vec{v}=\vec{o}$ នោះ$\vec{u}$ និង $\vec{v}$ ជាវ៉ិចទ័រកូលីនេអ៊ែនឹងគ្នា ។

ឃ. $|\vec{u}\times\vec{v}|$: ជាផ្ទៃក្រឡានៃប្រលេឡូក្រាមដែលសង់លើ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ ។

ង. $\frac{1}{2}|\vec{u}\times\vec{v}|$: ជាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណដែលសង់លើ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ ។

4.ម៉ូម៉ង់ $\vec{M}$ នៃកម្លាំង $\vec{F}$ ចំពោះចំណុច P



បើ Q ជាចំណុចចាប់នៃកម្លាំង $\vec{F}$ នោះម៉ូម៉ង់នៃកម្លាំង $\vec{F}$ ចំពោះចំណុច

P គឺ $|\vec{M}| = |\overrightarrow{PQ}\times\vec{F}|$ ។

៥.ផលគុណចម្រុះនៃបីវ៉ិចទ័រក្នុងលំហ

ក.និយមន័យ

គេមានវ៉ិចទ័របី $\vec{u}, \vec{v}$ និង $\vec{w}$ នៅក្នុងលំហ ។ ផលគុណចម្រុះនៃ $\vec{u}, \vec{v}$ និង $\vec{w}$ តាមលំដាប់គឺជាចំនួនពិតកំណត់ដោយ $\vec{u}.(\vec{v}\times\vec{w}) = r$ ។

ខ.ទ្រឹស្តីបទទី១

បើគេមានវ៉ិចទ័រ $\vec{u} = u_1.\vec{i} + u_2.\vec{j} + u_3.\vec{k}$

$\vec{v} = v_1.\vec{i} + v_2.\vec{j} + v_3.\vec{k}$ និង $\vec{w} = w_1.\vec{i} + w_2.\vec{j} + w_3.\vec{k}$

$$\vec{u}.(\vec{v}\times\vec{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

គ.ទ្រឹស្តីបទទី២

មាឌរបស់ប្រលេពីប៉ែតកែងដែលសង់លើវ៉ិចទ័រ $\vec{u}, \vec{v}$ និង $\vec{w}$ គឺ :

$V = |\vec{u}.(\vec{v}\times\vec{w})|$ និងមាឌ W របស់តេត្រាអ៊ែតគឺ : $W = \dfrac{|\vec{u}.(\vec{v}\times\vec{w})|}{6}$

បានន័យថាយកមាឌរបស់តេត្រាអ៊ែតចែកនឹង 6 ។

៦.បន្ទាត់ និង ប្លង់ក្នុងលំហ

ក_បន្ទាត់ក្នុងលំហ

ទ្រឹស្តីបទ :

♦គេមានបន្ទាត់ $\mathbf{L}$ មួយស្របនឹងវ៉ិចទ័រ $\vec{\mathbf{v}} = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ ហើយកាត់តាមចំនុច $\mathbf{P_0(x_0, y_0, z_0)}$ នោះសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ $\mathbf{L}$ គឺ :

$$\mathbf{x = x_0 + at\ ,\ y = y_0 + bt\ ,\ z = z_0 + ct\ \ (\ t \in IR)}$$

ឬ $\begin{cases} \mathbf{x = x_0 + at} \\ \mathbf{y = y_0 + bt} \quad ;\ \mathbf{t \in IR} \\ \mathbf{z = z_0 + ct} \end{cases}$ ។

♦បើ $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ ខុសពីសូន្យនោះសមីការឆ្លុះនៃបន្ទាត់ $\mathbf{L}$ គឺ :

$$\mathbf{L : \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}}$$ ។

ខ_ប្លង់ក្នុងលំហ

ទ្រឹស្តីបទ : បើប្លង់មួយកាត់តាមចំណុច $\mathbf{P(x_0, y_0, z_0)}$

និងមានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{\mathbf{n}} = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ នោះប្លង់មានសមីការស្តង់ដា :

$$\mathbf{a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0}$$

ដោយពន្លាតសមីការនេះហើយតាង $\mathbf{d = -(ax_0 + by_0 + cz_0)}$

នោះគេបានសមីការទូទៅ $\mathbf{ax + by + cz + d = 0}$ ។

គ_មុំរវាងប្លង់ពីរ

គេមានប្លង់ពីរ α_1 និង α_2 មានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់រៀងគ្នា $\vec{n}_1$ និង $\vec{n}_2$ នោះមុំ θ រវាងពីរវ៉ិចទ័រនេះ ជាមុំរវាងប្លង់ទាំងពីរដែលអាចកំណត់បាន តាមទំនាក់ទំនង $\cos\theta = \dfrac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$ ។

ឃ_សមីការស្វ៊ែ

សមីការស្តង់ដានៃស្វ៊ែដែលមានផ្ចិត $C(x_0, y_0, z_0)$ និងកាំ r គឺ

$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$ ។

ពន្លាតសមីការស្តង់ដាគេបានសមីការទូទៅនៃស្វ៊ែដែលមានរាង

$x^2 + y^2 + z^2 - 2x_0x - 2y_0y - 2z_0z + k = 0$

ដែល $k = {x_0}^2 + {y_0}^2 + {z_0}^2 - r^2$ ។

ង_ចម្ងាយពីចំណុចមួយទៅប្លង់ក្នុងលំហ

ទ្រឹស្តីបទ ចម្ងាយពីចំនុច Q ទៅប្លង់ α ដែលចំណុច Q មិននៅក្នុងប្លង់ α កំណត់ដោយ $D = \dfrac{|\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}$ ដែល P ជាចំណុចនៅក្នុងប្លង់ហើយ $\vec{n}$ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់ ។

បើ $Q(x_0, y_0, z_0)$ និង $\alpha : ax + by + cz + d = 0$

ហើយ $\vec{n} = (a, b, c)$ នោះ $D = \dfrac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ ។

ច-ចម្ងាយពីចំណុចមួយទៅបន្ទាត់ក្នុងលំហ

ទ្រឹស្តីបទ ចម្ងាយពីចំនុច Q ទៅបន្ទាត់ L ក្នុងលំហកំណត់ដោយ :

$D = \dfrac{|\overrightarrow{PQ} \times \vec{u}|}{|\vec{u}|}$ ដែល P ជាចំណុចនៅលើបន្ទាត់ហើយ $\vec{u}$ ជាវ៉ិចទ័រ

ប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ L ។

ជំពូកទី១៣ ចំនួនកុំផ្លិច

១-និយមន័យ :

. ចំនួនកុំផ្លិចជាចំនួនដែលមានទម្រង់ $z = a + i.b$ ដែល a និង b ជាពីរចំនួនពិត ហើយ i ហៅថាឯកតានិម្មិតដែល $i^2 = -1$ ឬ $i = \sqrt{-1}$ ។

. គេតាងសំណុំចំនួនកុំផ្លិចដោយ $\mathbb{C}$ ។

. a ហៅថាផ្នែកពិតដែលគេកំនត់តាងដោយ $Re(z) = a$ ។

. b ហៅថាផ្នែកនិម្មិតដែលគេកំនត់តាងដោយ $Im(z) = b$ ។

២-ប្រមាណវិធីលើចំនួនកុំផ្លិច

ក. ប្រមាណវិធីបូក និង ប្រមាណវិធីដក

សន្មតថាគេមាន $z_1 = a_1 + i.b_1$ និង $z_2 = a_2 + i.b_2$

ដែល $a_1, a_2, b_1, b_2 \in IR$ ។

គេបានរូបមន្ត $\boxed{z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i.(b_1 + b_2)}$

និង $\boxed{z_1 - z_2 = (a_1 + a_2) - i.(b_1 + b_2)}$

ខ. ប្រមាណវិធីគុណ និង ប្រមាណវិធីចែក

សន្មតថាគេមាន $z_1 = a_1 + i.b_1$ និង $z_2 = a_2 + i.b_2$

ដែល $a_1, a_2, b_1, b_2 \in IR$ ។

គេបានរូបមន្ត $\boxed{z_1 \times z_2 = (a_1a_2 - b_1b_2) + i.(a_1b_2 + a_2b_1)}$

និង $\boxed{\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i.\frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}}$ ។

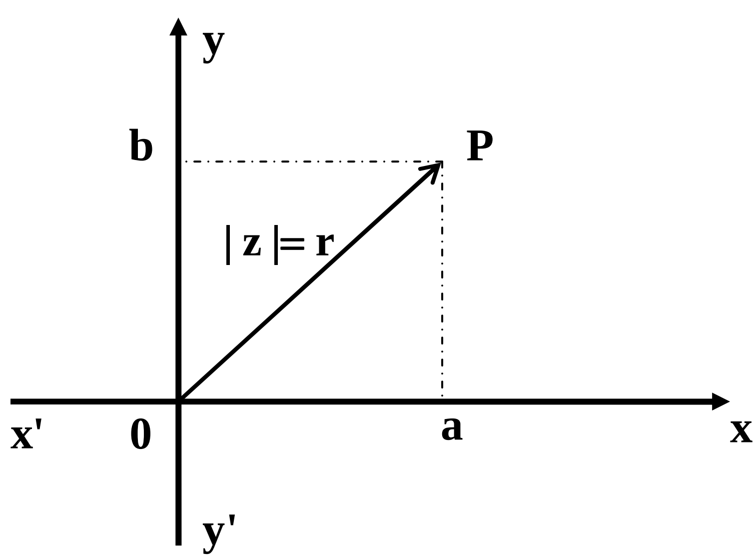
៣ -ចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់និងម៉ូឌុលនៃចំនួនកុំផ្លិច

. ចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់នៃចំនួនកុំផ្លិច $z = a + i.b$ គឺជាចំនួនកុំផ្លិចដែលតាងដោយ

$\bar{z} = a - i.b$ ។

. ក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់ គេអាចតាងចំនួនកុំផ្លិច $z = a + i.b$ ដោយចំនុច

$P(a\ ,b)$ ។



. រង្វាស់ $OP = r = |z|$ ហៅថាម៉ូឌុលនៃចំនួនកុំផ្លិច $z = a + i.b$

គេកំនត់សរសេរ : $\boxed{|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2}}$ ។

៥-ស្វ័យគុណនៃ i

ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ $k \in IN$ គេមានស្វ័យគុណនៃ i ដូចខាងក្រោម :

$i^{4k} = 1$, $i^{4k+1} = i$, $i^{4k+2} = -1$ និង $i^{4k+3} = -i$ ។

ឧទាហរណ៍ : គណនា $S = 1 + i + i^2 + i^3 + ... + i^{2006}$ ។

តាមរូបមន្តផលបូកស្វីតធរណីមាត្រ $1 + q + q^2 + q^3 + ... + q^n = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$

គេបាន $S = \dfrac{1 - i^{2007}}{1 - i}$ ដោយ $i^{2007} = i^{4\times 501+3} = -i$

ដូចនេះ $S = \dfrac{1+i}{1-i} = \dfrac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} = \dfrac{1+2i-1}{1+1} = \dfrac{2i}{2} = i$ ។

៦-អនុវត្តន៍ក្នុងដំណោះស្រាយសមីការដឺក្រេទីពីរ

គេមានសមីការដឺក្រេទីពីរ $az^2 + bz + c = 0$

ដែល $a \neq 0$ និង $a, b, c \in IR$ ។

ឌីសគ្រីមីណង់នៃសមីការគឺ $\Delta = b^2 - 4ac$ ។

-បើ $\Delta > 0$ សមីការមានឬសពីរជាចំនួនពិតគឺ :

$$z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad , \quad z_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad ។$$

-បើ $\Delta = 0$ សមីការមានឬសឌុបជាចំនួនពិតគឺ: $z_1 = z_2 = -\dfrac{b}{2a}$ ។

-បើ $\Delta < 0$ សមីការមានឫសពីរជាចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់គ្នាគឺ :

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{|\Delta|}}{2a} \quad , \quad z_2 = \frac{-b - i\sqrt{|\Delta|}}{2a} \quad ។$$

៧ -របៀបគណនាឫសការេនៃចំនួនកុំផ្លិច :

ដើម្បីគណនាឫសការេនៃចំនួនកុំផ្លិច $z = a + i.b$ គេត្រូវអនុវត្តន៍ដូចតទៅ :

-តាង $W = x + i.y \;\; ; x, y \in IR$ ជាឫសការេនៃ $z = a + i.b$ ។

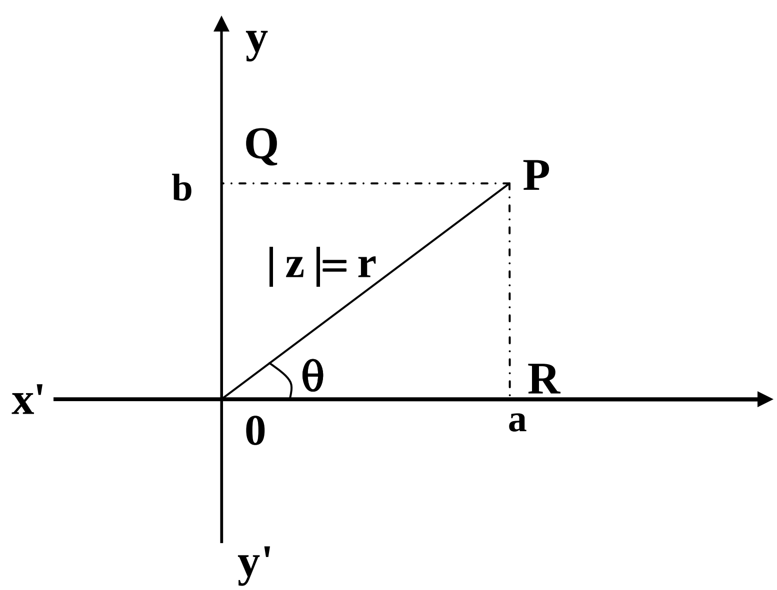
-គេបាន $W^2 = z$ ដោយ $W^2 = (x + i.y)^2 = (x^2 - y^2) + 2ixy$

-គេបាន $(x^2 - y^2) + 2ixy = a + i.b$

-គេទាញបានប្រព័ន្ធ $\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases}$

(ត្រូវដោះស្រាយប្រព័ន្ធនេះរកគូចម្លើយ $x;y$)

៨ -ទម្រង់ត្រីកោណមាត្រនៃចំនួនកុំផ្លិច



នៅក្នុងប្លង់កុំផ្លិច (xoy) គេឱ្យចំនុច $P(a \;; b)$ តាងឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $z = a + i.b$ ។

តាង θ ជាមុំតូចបំផុតនៃ $\left(\overrightarrow{0x}\ ;\ \overrightarrow{0P}\right)$ ។

ដែលហៅថាអាគុយម៉ង់នៃចំនួនកុំផ្លិច $z = a + i.b$ ។

ក្នុងត្រីកោណកែង OPR គេមាន $OP^2 = OR^2 + RP^2$

ដោយ $\begin{cases} OP = r = |z| \\ OR = a \\ RP = OQ = b \end{cases}$

គេបាន $r^2 = a^2 + b^2$ ឬ $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ (ហៅថាម៉ូឌុលនៃ $z = a + i.b$) ។

ម្យ៉ាងទៀត $\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{OR}{OP} = \dfrac{a}{r} \\ \sin\theta = \dfrac{RP}{OP} = \dfrac{b}{r} \end{cases}$ នាំឱ្យ $\begin{cases} a = r.\cos\theta \\ b = r.\sin\theta \end{cases}$

គេបាន $z = a + i.b = r.\cos\theta + i.r.\sin\theta = r(\cos\theta + i.\sin\theta)$

ដូចនេះ $\boxed{z = r.(\cos\theta + i.\sin\theta)}$ ដែល $\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{a}{r}\ ;\ \sin\theta = \dfrac{b}{r} \\ r = \sqrt{a^2 + b^2} > 0 \end{cases}$

៩ -ប្រមាណវិធីលើចំនួនកុំផ្លិចត្រីកោណមាត្រ

ក. រូបមន្តវិធីគុណ :

សន្មតថា $Z_1 = r_1\ (\cos\theta_1 + i.\sin\theta_1)$ និង $Z_2 = r_2\ (\cos\theta_2 + i.\sin\theta_2)$

គេបាន $\boxed{Z_1 \times Z_2 = r_1.r_2\ [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i.\sin(\theta_1 + \theta_2)]}$ ។

ខ. រូបមន្តវិធីចែក :

សន្មតថា $Z_1 = r_1 \ (\cos\theta_1 + i.\sin\theta_1)$ និង $Z_2 = r_2 \ (\cos\theta_2 + i.\sin\theta_2)$

គេបាន $\boxed{\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{r_1}{r_2} \ [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i.\sin(\theta_1 - \theta_2)]}$ ។

គ. ស្វ័យគុណទី n នៃចំនួនកុំផ្លិចត្រីកោណមាត្រ :

សន្មតថាគេមាន $Z = r \ (\cos\theta + i.\sin\theta)$ និងគ្រប់ចំនួនគត់ $n \in Z$

គេបាន $\boxed{Z^n = [r. \ (\cos\theta + i.\sin\theta)]^n = r^n \ [\cos(n\theta) + i.\sin(n\theta)]}$

ឃ. រូបមន្តដឺម័រ :

ចំពោះគ្រប់ $n \in Z$ គេមាន $\boxed{(\cos\theta + i.\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i.\sin(n\theta)}$

១០ -ឬសទី n នៃចំនួនកុំផ្លិច:

ទ្រឹស្តីបទ : សន្មតថា $Z = r \ (\cos\theta + i.\sin\theta)$ ជាចំនួនកុំផ្លិចមិនសូន្យ

ហើយ $n \in IN^*$ ។

បើ W_k ជាឬសទី n នៃចំនួនកុំផ្លិចខាងលើនោះគេបាន :

$$W_k = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i.\sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right]$$

ដែល $k = 0, 1, 2, 3, ..., n-1$ ។

១១ -ទម្រង់អិចស្ប៉ូណង់ស្យែលនៃចំនួនកុំផ្លិច :

ចំនួនកុំផ្លិច Z ដែលមានម៉ូឌុល $|Z| = r$ និង អាគុយម៉ង់ $\arg(Z) = \theta$

មានទម្រង់អិចស្ប៉ូណង់ស្យែលកំនត់ដោយ $Z = r \ . \ e^{i.\theta}$ ។

ជំពូកទី១៤

ទ្រឹស្តីបទក្នុងត្រីកោណ

១-ទំនាក់ទំនងមាត្រក្នុងត្រីកោណកែង

ឧបមាថាគេមានត្រីកោណ **ABC** មួយកែងត្រង់កំពូល **A** និងមានកំពស់ **AH** ។

គេមានទំនាក់ទំនងសំខាន់ៗដូចខាងក្រោម

1/ $AB^2 = BH.BC$

2/ $AC^2 = HC.BC$

3/ $AH^2 = BH.HC$

4/ $BC^2 = AB^2 + AC^2$ (ទ្រឹស្តីបទពីតាហ្គ័រ)

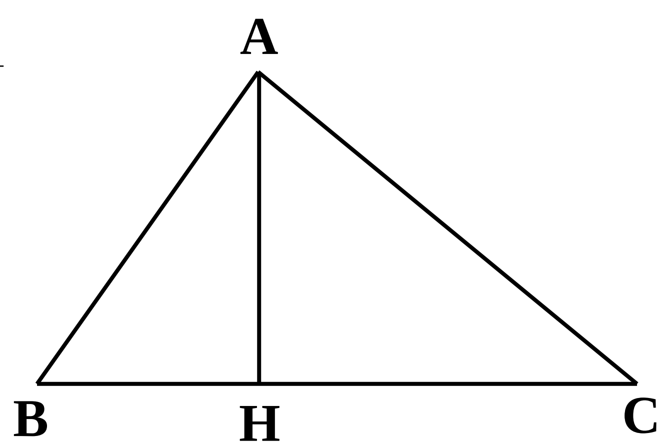
5/ $AH.BC = AB.AC$

6/ $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$

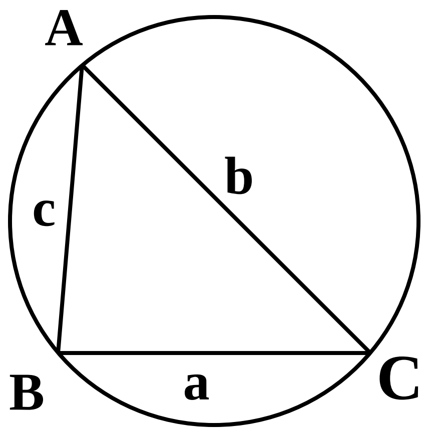
7/ $\sin\alpha = \frac{AB}{BC}$

8/ $\cos\alpha = \frac{AC}{BC}$

9/ $\tan\alpha = \frac{AB}{AC}$



២-ទ្រឹស្តីបទស៊ីនូស



ឧបមាថាគេមានត្រីកោណ ABC មួយចារឹកក្នុង រង្វង់កាំ R ហើយមានជ្រុង $BC = a$; $AC = b$ និង $AB = c$ ។

គេមានទំនាក់ទំនង $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$

៣-ទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនូស

ត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង $BC = a$; $AC = b$ និង $AB = c$ ។ គេមានទំនាក់ទំនង

1/ $a^2 = b^2 + c^2 - 2bccsoA$

2/ $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$

3/ $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

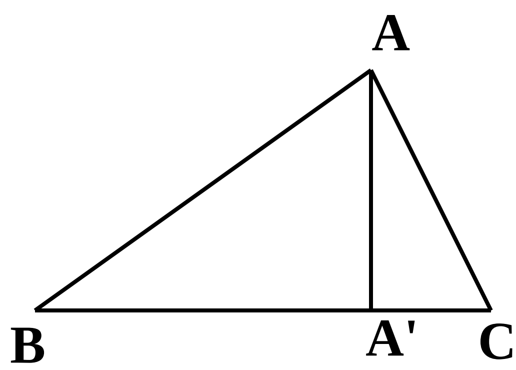
៨-រូបមន្តចំណោលកែង

ត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង $BC=a\ ;\ AC=b$ និង $AB=c$ ។ គេមានទំនាក់ទំនង

1/ $a=b\cos C+c\cos B$

2/ $b=c\cos A+a\cos C$

3/ $c=a\cos B+b\cos A$



៩-ទ្រឹស្តីបទតង់ហ្សង់

ត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង $BC=a\ ;\ AC=b$ និង $AB=c$ ។ គេមានទំនាក់ទំនង

1/ $\dfrac{a-b}{a+b}=\dfrac{\tan\frac{A-B}{2}}{\tan\frac{A+B}{2}}$

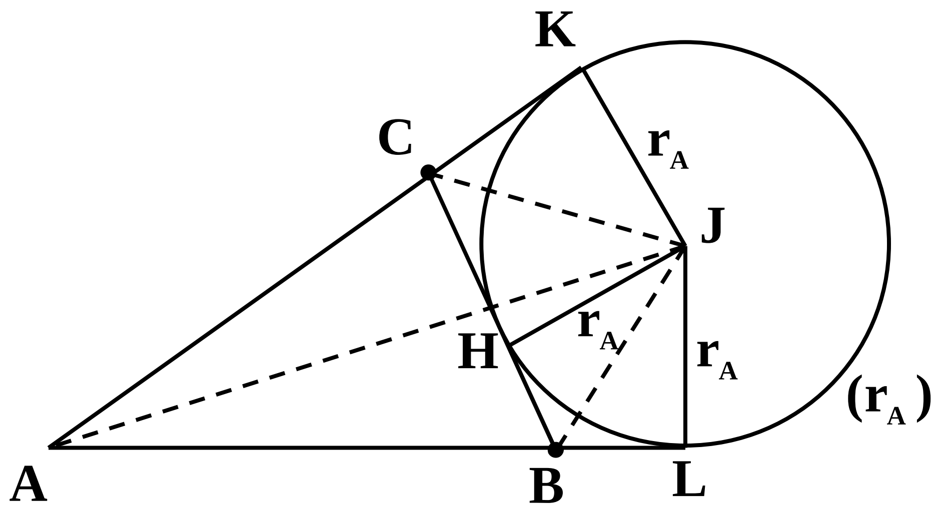
2/ $\dfrac{b-c}{b+c}=\dfrac{\tan\frac{B-C}{2}}{\tan\frac{B+C}{2}}$

3/ $\dfrac{c-a}{c+a}=\dfrac{\tan\frac{C-A}{2}}{\tan\frac{C+A}{2}}$

៦-កាំរង្វង់ចារឹកក្នុងមុំនៃត្រីកោណមួយ

ត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង $BC = a$; $AC = b$ និង $AB = c$ ហើយ $p = \frac{a+b+c}{2}$ ។

តាង r_A , r_B , r_C ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុងមុំ A, B, C នៃត្រីកោណ ABC ។គេមានទំនាក់ទំនង



1/ $r_A = p.\tan\frac{A}{2} = \frac{p-c}{\tan\frac{B}{2}} = \frac{p-b}{\tan\frac{C}{2}}$

2/ $r_B = p.\tan\frac{B}{2} = \frac{p-a}{\tan\frac{C}{2}} = \frac{p-c}{\tan\frac{A}{2}}$

3/ $r_C = p.\tan\frac{C}{2} = \frac{p-b}{\tan\frac{A}{2}} = \frac{p-a}{\tan\frac{B}{2}}$

៧-កន្សោមកាំរង្វង់ចារឹកក្នុងនៃត្រីកោណមួយ

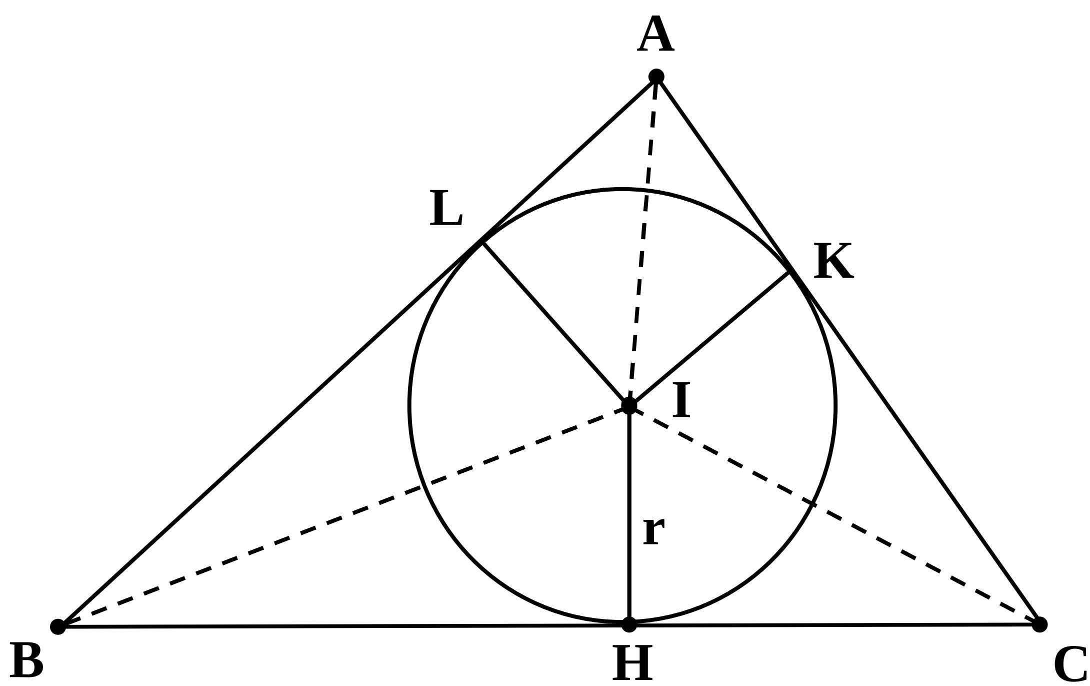
ត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង $BC = a$; $AC = b$

និង $AB = c$ ហើយ $p = \frac{a+b+c}{2}$ ។

តាង r ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុងនៃត្រីកោណនេះ ។

គេមានទំនាក់ទំនង

$$r = (p-a)\tan\frac{A}{2} = (p-b)\tan\frac{B}{2} = (p-c)\tan\frac{C}{2}$$



៨-រូបមន្តគណនាផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណ

ត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង $BC = a$; $AC = b$ និង $AB = c$ ហើយ $p = \frac{a+b+c}{2}$ ជាកន្លះបរិមាត្រ។ តាង r និង R រៀងគ្នាជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុងនិងក្រៅនៃត្រីកោណនេះ , តាង r_A , r_B , r_C ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុងមុំ និង h_a, h_b, h_c ជាកពស់គូសពីកំពូល A, B, C នៃត្រីកោណ ។

1/ $S = \frac{1}{2}a.h_a = \frac{1}{2}b.h_b = \frac{1}{2}c.h_c$

2/ $S = \frac{abc}{4R} = pr$

3/ $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

4/ $S = \frac{1}{2}b.c\sin A = \frac{1}{2}c.a\sin B = \frac{1}{2}a.b\sin C$

5/ $S = p(p-a)\tan\frac{A}{2} = p(p-b)\tan\frac{B}{2} = p(p-c)\tan\frac{C}{2}$

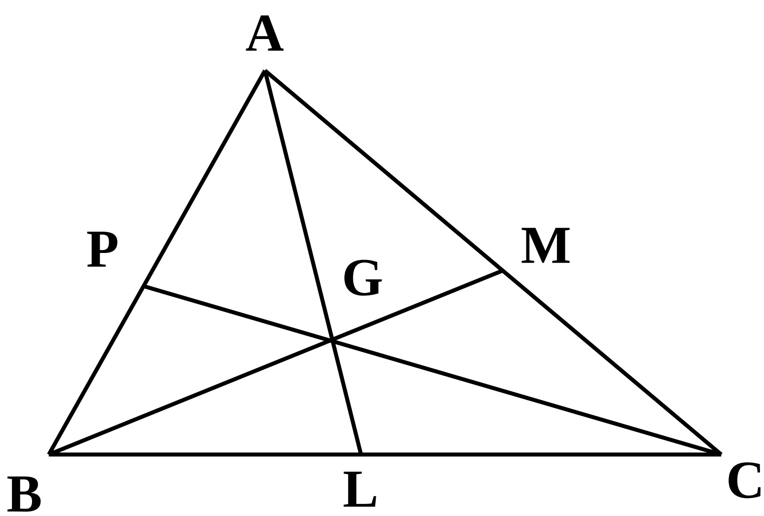
6/ $S = 2R^2\sin A\sin B\sin C$

7/ $S = (p-a)r_A = (p-b)r_B = (p-c)r_C$

8/ $S = \sqrt{r\ .r_A.r_B\ .r_C}$

៩-ទ្រឹស្តីបទមេដ្យានក្នុងត្រីកោណ

ត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង $BC = a$; $AC = b$ និង $AB = c$ ។ $AL = m_a$; $AM = m_b$; $AN = m_c$ ជាមេដ្យាននៃត្រីកោណ ABC ។



គេមានទំនាក់ទំនង

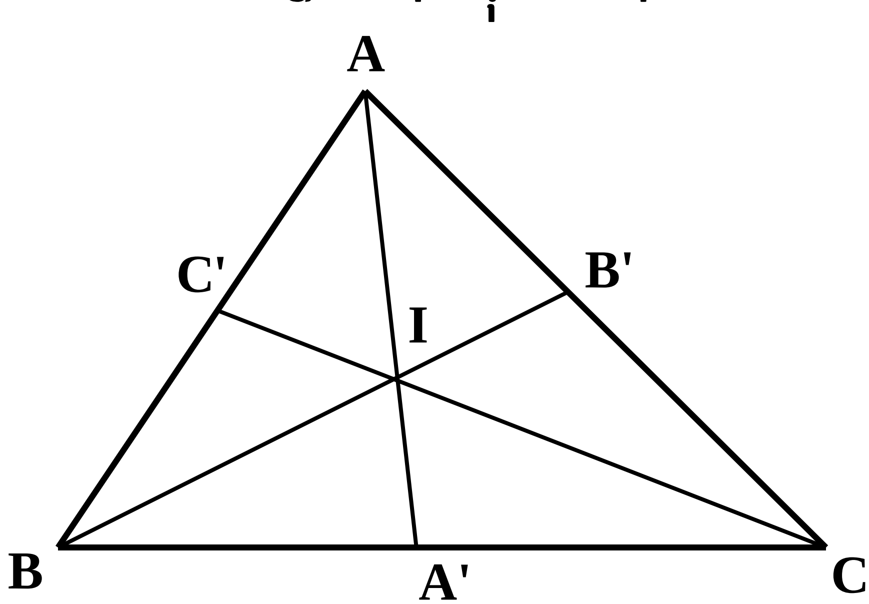
1/ $m_a^2 = \dfrac{b^2 + c^2}{2} - \dfrac{a^2}{4}$

2/ $m_b^2 = \dfrac{c^2 + a^2}{2} - \dfrac{b^2}{4}$

3/ $m_c^2 = \dfrac{a^2 + b^2}{2} - \dfrac{c^2}{4}$

១០-ទ្រឹស្តីបទបន្ទាត់ពុះមុំក្នុង

ត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង $BC = a$; $AC = b$ និង $AB = c$ ។ $AA' = L_a$; $BB' = L_b$; $CC' = L_c$ ជាប្រវែងនៃបន្ទាត់ពុះក្នុងនៃមុំ A , B , C ។



គេមានទំនាក់ទំនង

1/ $L_a = \frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}$

2/ $L_b = \frac{2ac}{a+c}\cos\frac{B}{2}$

3/ $L_c = \frac{2ab}{a+b}\cos\frac{C}{2}$

១១-កន្សោម $\cos\frac{A}{2}$; $\cos\frac{B}{2}$; $\cos\frac{C}{2}$

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}\ ;\ \cos\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}}$$

$$\cos\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}$$

១២-កន្សោម $\sin\frac{A}{2};\sin\frac{B}{2};\sin\frac{C}{2}$

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}\ ;\ \sin\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}}$$

$$\sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}$$

១៣-កន្សោម $\tan\frac{A}{2};\tan\frac{B}{2};\tan\frac{C}{2}$

$$\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}\ ;\ \tan\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}$$

$$\tan\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}$$

១៨-ទំនាក់ទំនងផ្សេងៗទៀតគួរកត់សំគាល់

ក្នុងត្រីកោណ ABC មួយគេមានទំនាក់ទំនងខាងក្រោម

1/ $\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

2/ $\cos A+\cos B+\cos C=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

3/ $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$

4/ $\cot A\cot B+\cot B\cot C+\cot C\cot A=1$

5/ $\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}=\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}$

6/ $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}=1$

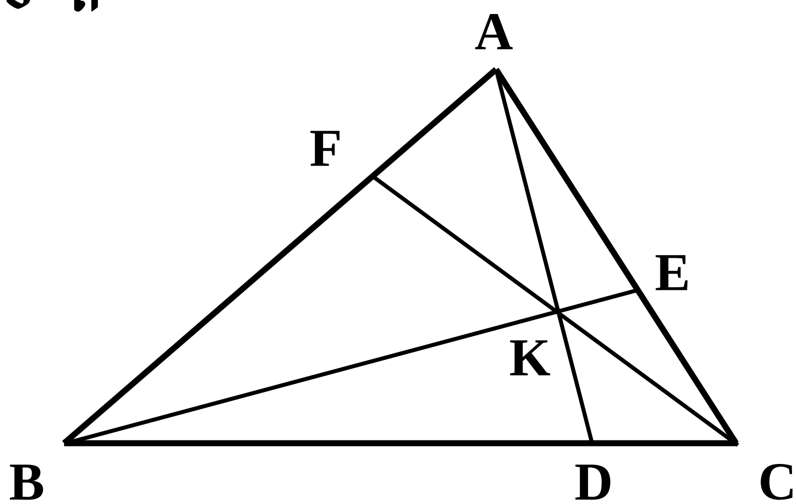
7/ $\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C=1-2\cos A\cos B\cos C$

8/ $\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C=2+2\cos A\cos B\cos C$

9/ $\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{C}{2}=2+2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

10/ $\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}=1-2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

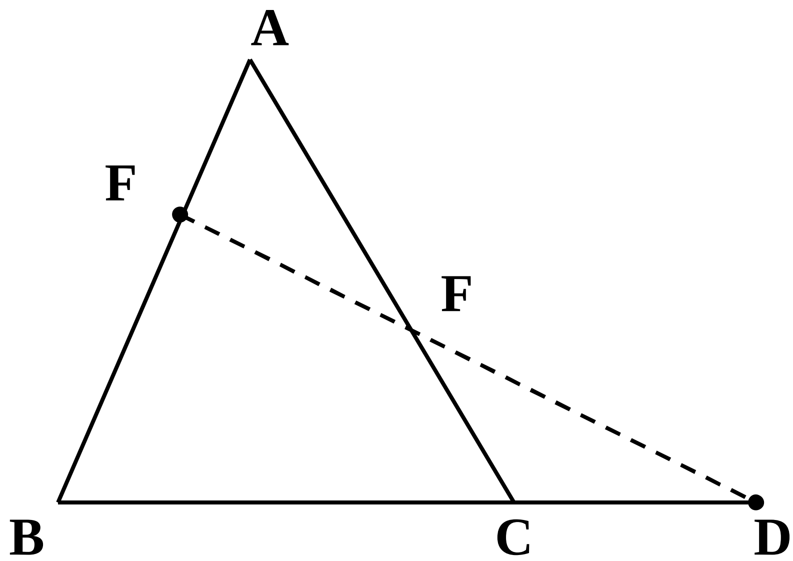
១៨-ទ្រឹស្តីបទ Ceva



ក្នុងត្រីកោណ ABC មួយ,បន្ទាត់បី AD ; BE; CF ប្រសព្វគ្នាត្រង់ចំនុច K តែមួយលុះត្រាតែ

$$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=1$$ ។

១៦-ទ្រឹស្តីបទ Menelaus



គេមានបីចំនុច F, D , E ស្ថិតនៅលើ AB , BC , AC

នៃត្រីកោណ ABC ។ បីចំនុចF, D , E រត់ត្រង់គ្នា

លុះត្រាតែ $\frac{AF}{BF}.\frac{BD}{CD}.\frac{CE}{AE}=1$ ។

១៧-ទ្រឹស្តីបទឡិបនិច

ក្នុងត្រីកោណ ABC ដែលមានជ្រុង a ; b ; c ចារឹក

ក្នុងរង្វង់ផ្ចិត O កាំ R ហើយ G ជាទីប្រជុំទម្ងន់នៃ

ត្រីកោណ ABC គេមាន $\mathbf{OG^2 = R^2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{9}}$ ។

១៧-ទ្រឹស្តីបទ Stewart

បើ L ជាចំនុចនៅលើជ្រុង BC នៃត្រីកោណ ABC

ដែល $AL = l$; $BL = m$; $LC = n$, a, b, c ជាជ្រុង

នោះគេមាន $a(l^2 + mn) = b^2m + c^2n$ ។

ជំពូកទី១៥ វិសមភាពចំនួនពិត

១/ វិសមភាព មធ្យមនព្វន្ត មធ្យមធរណីមាត្រ

(The AM-GM Inequality)

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមាន $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$

គេបាន $\frac{a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1.a_2.a_3...a_n}$ ។

វិសមភាពនេះក្លាយជាសមភាពលុះត្រាតែ និង

គ្រាន់តែ $a_1 = a_2 = a_3 = ... = a_n$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់

-គេមាន $\frac{a_1 + a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 a_2}$ សមមូល $(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})^2 \geq 0$

ដូចនេះវិសមភាពពិតចំពោះ $n = 2$ ។

-ឧបមាថាសមភាពនេះពិតដល់តួទី $n = k$ គឺ

$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_k}{k} \geq \sqrt[k]{a_1.a_2.a_3......a_k}$ ពិត

យើងនឹងស្រាយថាវាពិតដល់តួទី $k+1$ គឺ ៖

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_k + a_{k+1}}{k+1} \geq \sqrt[k+1]{a_1.a_2.a_3...a_k.a_{k+1}}$$

តាងអនុគមន៍

$$f(x)=\frac{(x+a_1+a_2+a_3+......+a_k)^{k+1}}{x}$$

ដែល $x>0\ ,\ a_k>0\ ,\ k=1\ ,\ 2\ ,\ 3\ ,\ ...$។

យើងបាន

$$f\,'(x)=\frac{(k+1)(x+a_1+....+a_k)^k x-(x+a_1+...+a_k)^{k+1}}{x^2}$$

$$=\frac{(x+a_1+....+a_k)^k\left[(k+1)x-(x+a_1+....+a_k)\right]}{x^2}$$

$$=\frac{(x+a_1+a_2+....+a_k)^k\left(kx-a_1-a_2-....-a_k\right)}{x^2}$$

បើ $f\,'(x)=0$ នាំឲ្យ $x=\dfrac{a_1+a_2+.....+a_k}{k}$

ចំពោះ $x=\dfrac{a_1+a_2+.....+a_k}{k}$ គេបាន ៖

$$f\left(\frac{a_1+a_2+....+a_k}{k}\right)=\frac{\left(\frac{a_1+a_2+...+a_k}{k}+a_1+...+a_k\right)^{k+1}}{\frac{a_1+a_2+...+a_k}{k}}$$

$$f\left(\frac{a_1+a_2+......+a_k}{k}\right)=(k+1)^{k+1}\left(\frac{a_1+a_2+...+a_k}{k}\right)^k$$

ចំពោះ $\forall x\geq 0$ យើងទាញបាន ៖

$$f(x) \geq f\left(\frac{a_1 + a_2 + ... + a_k}{k}\right)$$

$$f(x) \geq (k+1)^{k+1}\left(\frac{a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_k}{k}\right)^k$$

តាមការឧបមា $\frac{a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_k}{k} \geq \sqrt[k]{a_1.a_2.a_3......a_k}$

សមមូល $\left(\frac{a_1 + a_2 + ... + a_k}{k}\right)^k \geq a_1.a_2...a_k$

$$\frac{(x + a_1 + a_2 + ... + a_k)^{k+1}}{x} \geq (k+1)^{k+1} a_1 a_2 ... a_k$$

$$\frac{x + a_1 + a_2 + ... + a_k}{k+1} \geq \sqrt[k+1]{a_1.a_2.......a_k x} \quad (*)$$

យក $x = a_{k+1} > 0$ ជួសក្នុង $(*)$ គេបាន

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_k + a_{k+1}}{k+1} \geq \sqrt[k+1]{a_1.a_2.a_3......a_k.a_{k+1}}$$

ដូចនេះ $\frac{a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1.a_2.a_3...a_n}$ ។

២/ វិសមភាព កូស៊ី-ស្វ័ស (Cauchy-Schwarz’s Inequality)

ក-ទ្រឹស្តីបទ

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត a_1 ; a_2 ;...; a_n ; b_1 ; b_2 ; ...; b_n

គេបាន

$(a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n)^2 \le (a_1{}^2+a_2{}^2+...+a_n{}^2)(b_1{}^2+b_2{}^2+...+b_n{}^2)$ ឬ

$\left(\sum_{k=1}^{n}(a_kb_k)\right)^2 \le \sum_{k=1}^{n}\left(a_k^2\right)\times\sum_{k=1}^{n}\left(b_k^2\right)$ ។

វិសមភាពនេះក្លាយជាសមភាពលុះត្រាតែនិងគ្រាន់តែ

$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=...=\frac{a_n}{b_n}$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់

យើងជ្រើសរើសអនុគមន៍មួយកំនត់ $\forall x \in IR$ ដោយ ៖

$$f(x)=(a_1x+b_1)^2+(a_2x+b_2)^2+.....+(a_nx+b_n)^2$$

$$f(x)=\sum_{k=1}^{n}\left(a_k^2\right)x^2+2\sum_{k=1}^{n}(a_kb_k)x+\sum_{k=1}^{n}\left(b_k^2\right)$$

ដោយ $\forall x \in IR$ ត្រីធា $f(x)\ge 0$ ជានិច្ចនោះ $\begin{cases} a_f > 0 \\ \Delta' \le 0 \end{cases}$

ដោយ $a_f = a_1{}^2+a_2{}^2+.....+a_n{}^2 > 0$

ហេតុនេះគេបានជានិច្ច $\Delta' \le 0$

$$\Delta' = \left(\sum_{k=1}^{n}(a_kb_k)\right)^2-\sum_{k=1}^{n}\left(a_k^2\right)\times\sum_{k=1}^{n}\left(b_k^2\right)\le 0$$

ឬ $\left(\sum_{k=1}^{n}(a_kb_k)\right)^2 \le \sum_{k=1}^{n}\left(a_k^2\right)\times\sum_{k=1}^{n}\left(b_k^2\right)$

2/ Cauchy-Schwarz in Engle form

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ..., y_n > 0$

គេបាន

$$\frac{{x_1}^2}{y_1} + \frac{{x_2}^2}{y_2} + ... + \frac{{x_n}^2}{y_n} \geq \frac{(x_1 + x_2 + ... + x_n)^2}{y_1 + y_2 + ... + y_n}$$

វិសមភាពនេះក្លាយជាសមភាពលុះត្រាតែនិងគ្រាន់តែ

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \frac{x_3}{y_3} = ... = \frac{x_n}{y_n}$$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់

តាមវិសមភាព $\left(\sum_{k=1}^{n}(a_k b_k)\right)^2 \leq \sum_{k=1}^{n}\left(a_k^2\right) \times \sum_{k=1}^{n}\left(b_k^2\right)$

បើគេយក $a_k = \frac{x_k}{\sqrt{y_k}}$, $b_k = \sqrt{y_k}$

គេបាន $\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{x_k}{\sqrt{y_k}}.\sqrt{y_k}\right)\right)^2 \leq \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{{x_k}^2}{y_k}\right) \times \sum_{k=1}^{n}(y_k)$

គេទាញ $\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{{x_k}^2}{y_k}\right) \geq \frac{\left(\sum_{k=1}^{n}(x_k)\right)^2}{\sum_{k=1}^{n}(y_k)}$,

ដូចនេះ $\frac{x_1^{\ 2}}{y_1}+\frac{x_2^{\ 2}}{y_2}+...+\frac{x_n^{\ 2}}{y_n}\geq\frac{(x_1+x_2+...+x_n)^2}{y_1+y_2+...+y_n}$

៣/ វិសមភាពហូលឌ័រ (Hölder's Inequality)

ទ្រឹស្តីបទ គ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន $a_{i,j}$ $,1\leq i\leq m$, $1\leq j\leq 1$

គេបាន $\prod_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\right)\geq\left(\sum_{j=1}^{n}\sqrt[m]{\prod_{i=1}^{m}a_{ij}}\right)^{m}$ ។

រូបមន្តផ្សេងទៀតនៃ Hölder's Inequality

គ្រប់ចំនួនវិជ្ជមាន $x_1,x_2,....,x_n$ និង $y_1,y_2,...,y_n$

ចំពោះ $p>0,q>0$ និង $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$

នោះគេបាន $\sum_{k=1}^{n}(x_k y_k)\leq\left(\sum_{k=1}^{n}x_k^{\ p}\right)^{\frac{1}{p}}\times\left(\sum_{k=1}^{n}y_k^{\ q}\right)^{\frac{1}{q}}$ ។

៤/ វិសមភាពមិនកូស្គី (Minkowski's Inequality)

ទ្រឹស្តីបទទី១ ចំពោះចំនួនវិជ្ជមាន $a_1,a_2,...,a_n$ និង

$b_1,b_2,....,b_n$; $\forall n\in\mathbb{N}$ និងចំពោះ $p\geq 1$ គេបាន :

$$\left(\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{k=1}^{n}a_k{}^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n}b_k{}^p\right)^{\frac{1}{p}}$$ ។

ទ្រឹស្តីបទទី២ ចំពោះចំនួនវិជ្ជមាន $a_1,a_2,...,a_n$ និង

$b_1,b_2,....,b_n$; $\forall n\in\mathbb{N}$ ដែល $n\ge 2$ គេបាន

$$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}(a_k)}+\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}(b_k)}\le\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}(a_k+b_k)}$$ ។

៥/ វិសមភាពប៊ែនូលី(Bernoulli’s Inequality)

- ចំពោះ $x>-1$, $a\in(0,1)$ គេបាន:$(1+x)^a<1+ax$
- ចំពោះ $x>-1, n<1$ គេបាន:$(1+x)^a>1+ax$

៦/ វិសមភាព CHEBYSHEV*(*Chebyshev´s Inequality*)*

គេអោយពីរស្វ៊ីតនៃចំនួនពិតវិជ្ជមាន

$a_1,a_2,...,a_n$ និង $b_1,b_2,....,b_n$ និង $n\in\mathbb{N}^*$

-ចំពោះ$a_1\le a_2\le...\le a_n$ និង $b_1\le b_2\le...\le b_n$

គេបាន : $\sum_{k=1}^{n}(a_k b_k) \geq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(a_k) \times \sum_{k=1}^{n}(b_k)$

-ចំពោះ $a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_n$ និង $b_1 \geq b_2 \geq ... \geq b_n$

គេបាន $\sum_{k=1}^{n}(a_k b_k) \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(a_k) \times \sum_{k=1}^{n}(b_k)$

៧/ វិសមភាព JENSEN (Jensen's Inequality)

វិសមភាព JENSEN ទម្រង់ទី១

គេឲ្យ n ចំនួនពិត $x_1, x_2, ..., x_n \in I$

. បើ $f''(x) < 0$ និង $\forall x_k \in I$ គេបាន:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}[f(x_k)] \leq f\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k)\right]$$ ។

. បើ $f''(x) > 0$ និង $\forall x_k \in I$ គេបាន:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}[f(x_k)] \geq f\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k)\right]$$ ។

វិសមភាព JENSEN *ទម្រង់ទី២*

គេឲ្យ n ចំនួនពិត $x_1, x_2, ..., x_n \in I$ និងចំពោះគ្រប់

ចំនួនវិជ្ជមាន $a_1, a_2, ..., a_n$ ដែលផលបូក $\sum_{k=1}^{n}(a_k) = 1$

. បើ $f''(x) < 0$ និង $\forall x_k \in I$ គេបាន:

$$\sum_{k=1}^{n}\left[a_k f(x_k)\right] \le f\left[\sum_{k=1}^{n}(a_k x_k)\right]$$ ។

. បើ $f''(x) > 0$ និង $\forall x_k \in I$ គេបាន:

$$\sum_{k=1}^{n}\left[f(a_k x_k)\right] \ge f\left[\sum_{k=1}^{n}(a_k x_k)\right]$$ ។

វិសមភាព JENSEN *ទម្រង់ទី៣*

គេឲ្យ n ចំនួនពិត $x_1, x_2, ..., x_n \in I$ និងចំពោះគ្រប់

ចំនួនវិជ្ជមាន $a_1, a_2, ..., a_n$ ។

. បើ $f''(x) < 0$ និង $\forall x_k \in I$ គេបាន:

$$\frac{\sum_{k=1}^{n}\left[a_k f(x_k)\right]}{\sum_{k=1}^{n}(a_k)} \le f\left[\frac{\sum_{k=1}^{n}(a_k x_k)}{\sum_{k=1}^{n}(a_k)}\right]$$ ។

. បើ $f''(x) > 0$ និង $\forall x_k \in I$ គេបាន:

$$\frac{\sum_{k=1}^{n}\left[a_k f(x_k)\right]}{\sum_{k=1}^{n}(a_k)} \ge f\left[\frac{\sum_{k=1}^{n}(a_k x_k)}{\sum_{k=1}^{n}(a_k)}\right]$$

៨/ វិសមភាព Schur (Schur's Inequality)

គ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន a,b,c និង $n > 0$ គេបាន

$$a^n(a-b)(a-c)+b^n(b-c)(b-a)+c^n(c-a)(c-b) \ge 0$$

វិសមភាពនេះពិតចំពោះ $a = b = c$ ។

៩/ វិសមភាព (Rearrangement's Inequality)

គេឲ្យ $(a_n)_{n\ge1}$ និង $(b_n)_{n\ge1}$ ជាស្វ៊ីតនៃចំនួនពិតវិជ្ជមាន កើន ឬចុះព្រមគ្នា ។ ចំពោះគ្រប់ចម្លាស់ (c_n) នៃចំនួន (b_n) គេបាន $\sum_{k=1}^{n}(a_k b_k) \ge \sum_{k=1}^{n}(a_k c_k) \ge \sum_{k=1}^{n}(a_k b_{n-k+1})$

ជំពូកទី១៦

ភាពចែកដាច់ និង វិធីចែកអឺគ្លីត

1.ភាពចែកដាច់ក្នុង Z

ក_និយមន័យ

_ចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប **a** ជាពហុគុណនៃចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប **b** លុះត្រាតែមាន ចំនួនរ៉ឺឡាទីប **q** មួយដែល $\mathbf{a = b.q}$ ។

ក្នុងករណីនេះ **b** ហៅថាតួចែកនៃ **a** ។

-បើ $\mathbf{b \neq 0}$ នោះគេថា **b** ជាតួចែកមួយនៃ **a** ឬ **b** ចែកដាច់**a** ហើយ គេកំនត់សរសេរ $\mathbf{b\,|\,a}$ អានថា **b** ចែកដាច់ **a** ។

ខ_លក្ខណៈចែកដាច់នៃផលបូកនិងផលដក

មាន **a , b , c** និង **x** ជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីបដែល **x** ខុសពីសូន្យ ។

បើ $\mathbf{x\,|\,a}$, $\mathbf{x\,|\,b}$ និង $\mathbf{x\,|\,c}$ នោះ $\mathbf{x\,|\,(a+b-c)}$ ។

គ_លក្ខណៈចែកដាច់នឹងមួយចំនួន

-មួយចំនួនគត់ចែកដាច់នឹង **2** លុះត្រាតែលេខខ្ទង់រាយចែកដាច់នឹង **2** បានន័យថាចំនួននោះត្រូវមានលេខខាងចុងជាលេខគូ :

(0, 2, 4 , 6,8) ។

-មួយចំនួនចែកដាច់នឹង **5** លុះត្រាតែវាមានលេខចុង 0 ឬ 5 ។

-មួយចំនួនចែកដាច់នឹង 4 លុះត្រាតែចំនួនពីរខ្ទង់ខាងចុងចែកដាច់នឹង 4

-មួយចំនួនចែកដាច់នឹង 25 លុះត្រាតែចំនួនពីរខ្ទង់ខាងចុងចែកដាច់នឹង 25 គឺ **00, 25 , 50 , 75** ។

-មួយចំនួនចែកដាច់នឹង 3 (នឹង 9) លុះត្រាតែផលបូកលេខគ្រប់ខ្ទង់នៃចំនួននោះចែកដាច់នឹង 3 (នឹង 9) ។

-មួយចំនួនចែកដាច់នឹង 11 លុះត្រាតែផលដករវាងផលបូកលេខខ្ទង់សេស និងផលបូកលេខខ្ទង់គូនៃចំនួននោះ (រាប់ពីស្តាំទៅឆ្វេង) ចែកដាច់នឹង 11 ។

2.វិធីចែកបែបអឺគ្លីត

ក_និយមន័យ

ធ្វើវិធីចែកបែបអឺគ្លីតនៃចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប $\mathbf{a}$ និងចំនួនគត់ធម្មជាតិ $\mathbf{b}$ គឺកំណត់ចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប $\mathbf{q}$ និងចំនួនគត់ធម្មជាតិ $\mathbf{r}$ ដែល $\mathbf{a = bq + r}$ ដោយ $\mathbf{0 \le r < b}$ ។

$\mathbf{a}$ ហៅថាតំណាំងចែក , $\mathbf{b}$ ហៅថាតួចែក , $\mathbf{q}$ ហៅថាផលចែក និង $\mathbf{r}$ ហៅថាសំណល់ ។

ខ_ទ្រឹស្តីបទ បើ $\mathbf{a}$ ជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប និង $\mathbf{b}$ ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ

នោះមានចំនួនគត់ រ៉ឺឡាទីប $\mathbf{q}$ តែមួយគត់ និង ចំនួនគត់ធម្មជាតិ $\mathbf{r}$

តែមួយគត់ដែល $\mathbf{a = b.q + r}$ ដោយ $\mathbf{0 \le r < b}$ ។

ចំនួនបឋម តួចែករួម និង ពហុគុណរួម

✍ ចំនួនបឋម

_គេថាចំនួនគត់ធម្មជាតិ $\mathbf{n}$ ជាចំនួនបឋមកាលណា $\mathbf{n}$ មានតួចែក

តែពីគត់គឺ $\mathbf{1}$ និង $\mathbf{n}$ ខ្លួនឯង ។

_គ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ $\mathbf{n > 1}$ មានតួចែកជាចំនួនបឋមមួយដែលជា

តួចែកតូចបំផុតក្រៅពី $\mathbf{1}$ ។

_បើ $\mathbf{n \in IN}$ ហើយ $\mathbf{n}$ មិនមែនជាចំនួនបឋម នោះមានចំនួនបឋម $\mathbf{b}$

ដែល $\mathbf{n}$ ចែកដាច់នឹង $\mathbf{b}$ និង $\mathbf{b^2 \le n}$ ។

_ដើម្បីស្គាល់ថាចំនួនគត់ធម្មជាតិ $\mathbf{a}$ ណាមួយជាចំនួនបឋម គេត្រូវចែក

$\mathbf{a}$ និងចំនួនបឋមតៗគ្នាដែលតូចជាងវា ។ បើគ្មានវិធីចែកណាមួយផ្តល់

សំណល់សូន្យទេនោះ និង ផលចែកតូចជាងតួចែកដែលបានយកមកប្រើ

នោះ $\mathbf{a}$ ជាចំនួនបឋម ។

_បើ $\mathbf{n} \in \mathbb{N}$ ហើយ $\mathbf{n}$ ចែកមិនដាច់នឹងចំនួនបឋមដែលមានការេតូច

ជាងឬស្មើ **n** នោះ **n** ជាចំនួនបឋម ។

-ស៊ីតនៃចំនួនបឋម ជាស៊ីតអនន្តតួ ។

-គ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិមិនបឋម ហើយធំជាង **1** អាចបំបែកជាផលគុណនៃកត្តាបឋមបាន ហើយបានតែមួយបែបគត់ ។

✍ តួចែករួម និង ពហុគុណរួម

-គេឱ្យ **a** និង **b** ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ ។ ចំនួនគត់ធម្មជាតិ **d** ជាតួចែករួមនៃ **a** និង **b** កាលណា **d** ជាតួចែកនៃ **a** ផង និងជាតួចែកនៃ**b** ផង ។

-តួចែករួមធំបំផុតនៃចំនួនគត់ធម្មជាតិ **a** និង **b** ជាចំនួនគត់ធំជាងគេនៃបណ្តាតួចែករួមនៃ **a** និង **b** ។ និម្មិតសញ្ញា $\delta = PGCD(a,b)$ ឬ $\delta = GCD(a,b)$ ជាតំណាងឱ្យតួចែករួមធំបំផុតនៃចំនួនគត់ធម្មជាតិ **a** និង **b** ។

-ចំនួនគត់ធម្មជាតិ **a** និង**b** ជាចំនួនបឋមរវាងគ្នាកាលណា តួចែករួមធំបំផុត $GCD(a,b) = 1$ និងច្រាស់មកវិញ ។

-បើ $a , b \in \mathbb{N}$ ដែល $a = bq + r$, $0 < r < b$ នោះគេបាន

$$GCD(a,b) = GCD(b,r)$$ ។

-គ្រប់ $a , b \in \mathbb{N}$ និងគ្រប់តួចែករួម **d** នៃ **a** និង **b** គេបាន :

ក. $\mathbf{GCD(na,nb) = nG(a,b)}$ ដែល $\mathbf{n} \in \mathbb{N}$

ខ. $\mathbf{GCD\left(\frac{a}{d},\frac{b}{d}\right) = \frac{GCD(a,b)}{d}}$

-**ទ្រឹស្តីបទ Bezout** ចំនួនគត់ធម្មជាតិ $\mathbf{a}$ និង $\mathbf{b}$

បឋមរវាងគ្នាលុះត្រាតែមានចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប $\mathbf{u}$ និង $\mathbf{v}$

ដែល $\mathbf{au + bv = 1}$ ។

-**ទ្រឹស្តីបទ Gauss :**

បើ $\mathbf{c\,|\,ab}$ និង $\mathbf{GCD(a,b) = 1}$ នាំឱ្យ $\mathbf{c\,|\,b}$ ។

-បើ $\mathbf{a\,|\,n}$; $\mathbf{b\,|\,n}$ និង $\mathbf{GCD(a,b) = 1}$ នាំឱ្យ $\mathbf{ab\,|\,n}$ ។

-ពហុគុណរួមតូចបំផុតនៃពីរចំនួនគត់ $\mathbf{a}$ និង $\mathbf{b}$ គឺជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ

ដែលតូចជាងគេក្នុងបណ្តាពហុគុណរួមវិជ្ជមានខុសពីសូន្យនៃ $\mathbf{a}$ និង $\mathbf{b}$

ដែលកំណត់ដោយ $\mathbf{\mu = PPCM(a,b)}$ ឬ $\mathbf{\mu = LCM(a,b)}$

-គ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ $\mathbf{a}$,$\mathbf{b}$ និង $\mathbf{n}$ និងគ្រប់តួចែករួម $\mathbf{a}$ និង $\mathbf{b}$

គេបាន ក. $\mathbf{LCM(na,nb) = nLCM(a,b)}$

ខ. $\mathbf{LCM(\frac{a}{d},\frac{b}{d}) = \frac{LCM(a,b)}{d}}$

-**ទ្រឹស្តីបទ** : បើ $\mathbf{a}$ និង $\mathbf{b}$ ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិនោះគេបាន

$\mathbf{GCD(a,b) \times LCM(a,b) = a \times b}$ ។

ជំពូកទី១៧

អនុគមន៍អ៊ីពែបូលិក

(Hyperbolic Functions)

1.កន្សោមពីជគណិតស្តង់ដា

អនុគមន៏អ៊ីពែបូលិកមាន :

◆ ស៊ីនូសអ៊ីពែបូលិក កំណត់ដោយសមីការ $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

◆ កូស៊ីនូសអ៊ីពែបូលិក កំណត់ដោយសមីការ $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

◆ តង់សង់អ៊ីពែបូលិក កំណត់ដោយសមីការ $\tanh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

◆ កូតង់សង់អ៊ីពែបូលិក កំណត់ដោយសមីការ $\coth x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

2.ទំនាក់ទំនងសំខាន់ៗ

ក. $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

ខ. $\tanh x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x}$

គ. $\coth x = \dfrac{\cosh x}{\sinh x}$

ឃ. $\tanh x = \dfrac{1}{\coth x}$

ង. $1 - \tanh^2 x = \dfrac{1}{\cosh^2 x}$

ច. $\coth^2 x - 1 = \dfrac{1}{\sinh^2 x}$

សម្រាយបញ្ជាក់

ដោយ $\sinh x = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2}$ និង $\cosh x = \dfrac{e^{x} + e^{-x}}{2}$

គេបាន $\cosh^2 x - \sinh^2 x = \left(\dfrac{e^{x} + e^{-x}}{2} \right)^2 - \left(\dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2} \right)^2$

$$= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4}$$

$$= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x} - e^{2x} + 2 - e^{-2x}}{4}$$

$$= 1$$

ដូចនេះ $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ ។

តាម $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

គេបាន $\dfrac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \dfrac{1}{\cosh^2 x}$

$1 - \dfrac{\sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \dfrac{1}{\cosh^2 x}$ ដោយ $\tanh x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x}$

ដូចនេះ $1 - \tanh^2 x = \dfrac{1}{\cosh^2 x}$ ។

ម្យ៉ាងទៀត $\dfrac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\sinh^2 x} = \dfrac{1}{\sinh^2 x}$

$\dfrac{\cosh^2 x}{\sinh^2 x} - 1 = \dfrac{1}{\sinh^2 x}$ ដោយ $\coth x = \dfrac{\cosh x}{\sinh x}$

ដូចនេះ $\coth^2 x - 1 = \dfrac{1}{\cosh^2 x}$ ។

3.រូបមន្តផលបូក

1. $\sinh(x+y)=\sinh x\cosh y+\sinh y\cosh x$

2. $\cosh(x+y)=\cosh x\cosh y+\sinh x\sinh y$

3. $\tanh(x+y)=\dfrac{\tanh x+\tanh y}{1+\tanh x\tanh y}$

4. $\coth(x+y)=\dfrac{\coth x\coth y+1}{\coth x+\coth y}$

សំរាយបញ្ជាក់

គេមាន $\sinh x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$, $\cosh x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$

$$\sinh y=\frac{e^y-e^{-y}}{2}\ ,\ \cosh y=\frac{e^y+e^{-y}}{2}$$

គេបាន $\sinh x\cosh y=\dfrac{(e^x-e^{-x})(e^y+e^{-y})}{4}$

$$\sinh x\cosh y=\frac{e^{x+y}-e^{-(x+y)}+e^{x-y}-e^{-(x+y)}}{4}\quad (a)$$

ហើយ $\sinh y\cosh x=\dfrac{(e^y-e^{-y})(e^x+e^{-x})}{4}$

$$\sinh y\cosh x=\frac{e^{x+y}+e^{-(x+y)}-e^{x-y}-e^{-(x+y)}}{4}\quad (b)$$

បូកសមីការ (a) និង (b) គេបាន :

$$\sinh x\cosh y+\sinh y\cosh x=\frac{e^{x+y}-e^{-(x-y)}}{2}=\sinh(x+y)$$

ម្យ៉ាងទៀត $\cosh x \cosh y = \dfrac{(e^x + e^{-x})(e^y + e^{-y})}{4}$

$$\cosh x \cosh y = \frac{e^{x+y} + e^{x-y} + e^{-x+y} + e^{-(x+y)}}{4} \quad (c)$$

ហើយ $\sinh x \sinh y = \dfrac{(e^x - e^{-x})(e^y - e^{-y})}{4}$

$$\sinh x \sinh y = \frac{e^{x+y} - e^{x-y} - e^{-x+y} + e^{-(x+y)}}{4} \quad (d)$$

បូកសមីការ (c) និង (d) គេបាន ៖

$$\cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y = \frac{e^{x+y} + e^{-(x+y)}}{2} = \cosh(x+y)$$

ដូចនេះ $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$ ។

គេមាន $\tanh(x+y) = \dfrac{\sinh(x+y)}{\cosh(x+y)}$

$$= \frac{\sinh x \cosh y + \sinh y csohx}{\cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y}$$

$$= \frac{\cosh x \cosh y(\frac{\sinh x}{\cosh x} + \frac{\sinh y}{\cosh y})}{\cosh x \cosh y(1 + \frac{\sinh x \sinh y}{\cosh x \cosh y})}$$

$$= \frac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \tanh y}$$

ដូចនេះ $\tanh(x+y) = \dfrac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \tanh y}$ ។

3.អនុគមន៍នៃអាគុយម៉ង់អវិជ្ជមាន

1. $\sinh(-x) = -\sinh x$

2. $\cosh(-x) = \cosh x$

3. $\tanh(-x) = -\tanh x$

4. $\coth(-x) = -\coth x$

សម្រាយបញ្ជាក់

គេមាន $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

គេបាន $\sinh(-x) = \dfrac{e^{-x} - e^x}{2} = -\dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = -\sinh x$

ហើយ $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

គេបាន $\cosh(-x) = \dfrac{e^{-x} + e^x}{2} = \cosh x$ ។

$$\tanh(-x) = \frac{\sinh(-x)}{\cosh(-x)} = -\frac{\sinh x}{\cosh x} = -\tanh x$$

$$\coth(-x) = \frac{\cosh(-x)}{\sinh(-x)} = -\frac{\cosh x}{\sinh x} = -\coth x$$

5.រូបមន្តផលដក

1. $\sinh(x - y) = \sinh x \cosh y - \sinh y \cosh x$

2. $\cosh(x - y) = \cosh x \cosh y - \sinh x \sinh y$

3. $\tanh(x-y)=\dfrac{\tanh x-\tanh y}{1-\tanh x\tanh y}$

4. $\coth(x-y)=\dfrac{1-\coth x\coth y}{\coth x-\coth y}$

សម្រាយបញ្ជាក់

គេមាន $\sinh(x+y)=\sinh x\cosh y+\sinh y\cosh x \quad (i)$

$$\cosh(x+y)=\cosh x\cosh y+\sinh x\sinh y \quad (ii)$$

$$\tanh(x+y)=\frac{\tanh x+\tanh y}{1+\tanh x\tanh y} \quad (iii)$$

$$\coth(x+y)=\frac{\coth x\coth y+1}{\coth x+\coth y} \quad (iv)$$

ដោយជំនួស y ដោយ $-y$ ក្នុង $(i),(ii),(iii)$ និង (iv)

គេបាន $\sinh(x-y)=\sinh x\cosh(-y)+\sinh(-y)\cosh x$

$$=\sinh x\cosh y-\sinh y\cosh x$$

$$\cosh(x-y)=\cosh x\cosh(-y)+\sinh x\sinh(-y)$$

$$=\cosh x\cosh y-\sinh x\sinh y$$

$$\tanh(x-y)=\frac{\tanh x+\tanh(-y)}{1+\tanh x\tanh(-y)}=\frac{\tanh x-\tanh y}{1-\tanh x\tanh y}$$

$$\coth(x-y)=\frac{\coth x\coth(-y)+1}{\coth x+\coth(-y)}=\frac{1-\coth x\coth y}{\coth x-\coth y}$$

៦.រូបមន្តមុំឌុប (DOUBLE ANGLE FORMULAS)

1. $\sinh 2x = 2\sinh x \cosh x$

2. $\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$

$$= 2\cosh^2 x - 1 = 1 + 2\sinh^2 x$$

3. $\tanh 2x = \dfrac{2\tanh x}{1+\tanh^2 x}$

4. $\coth 2x = \dfrac{1+\coth^2 x}{2\coth x}$

សម្រាយបញ្ជាក់

គេមាន $\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \sinh y \cosh x \quad (i)$

$$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y \quad (ii)$$

$$\tanh(x+y) = \frac{\tanh x + \tanh y}{1+\tanh x \tanh y} \quad (iii)$$

$$\coth(x+y) = \frac{\coth x \coth y + 1}{\coth x + \coth y} \quad (iv)$$

ដោយជំនួស y ដោយ x ក្នុង $(i),(ii),(iii)$ និង (iv) គេបាន :

$$\sinh 2x = 2\sinh x \cosh x$$

$$\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$$

$\tanh 2x = \dfrac{2\tanh x}{1+\tanh^2 x}$ និង $\coth 2x = \dfrac{1+\coth^2 x}{2\coth x}$

7.រូបមន្តកន្លះមុំ (HALE ANGLE FORMULAS)

1. $\sinh^2 \frac{x}{2} = \frac{\cosh x - 1}{2}$
2. $\cosh^2 \frac{x}{2} = \frac{\cosh x + 1}{2}$
3. $\tanh^2 \frac{x}{2} = \frac{\cosh x - 1}{\cosh x + 1}$
4. $\coth^2 \frac{x}{2} = \frac{\cosh x + 1}{\cosh x - 1}$

8.រូបមន្តពហុមុំ (MULTIPLE ANGLE FORMULAS)

1. $\sinh 3x = 3\sinh x + 4\sinh^3 x$
2. $\cosh 3x = 4\cosh^3 x - 3\cosh x$
3. $\tanh 3x = \frac{3\tanh x + \tanh^3 x}{1 + 3\tanh^2 x}$
4. $\sinh 4x = 8\sinh^3 x \cosh x + 4\sinh x \cosh x$
5. $\cosh 4x = 8\cosh^4 x - 8\cosh^2 x + 1$
6. $\tanh 4x = \frac{4\tanh x + 4\tanh^3 4x}{1 + 6\tanh^2 x + \tanh^4 x}$

៩.រូបមន្តផលបូក_ផលដក និង ផលគុណ

(Sum-Difference and Product of Hyperbolic Functions)

1. $\sinh x + \sinh y = 2\sinh\frac{x+y}{2}\cosh\frac{x-y}{2}$

2. $\cosh x + \cosh y = 2\cosh\frac{x+y}{2}\cosh\frac{x-y}{2}$

3. $\sinh x - \sinh y = 2\sin\frac{x-y}{2}\cosh\frac{x+y}{2}$

4. $\cosh x - \cosh y = 2\sinh\frac{x+y}{2}\sinh\frac{x-y}{2}$

5. $\tanh x + \tanh y = \frac{\sinh(x+y)}{\cosh x \cosh y}$

6. $\tanh x - \tanh y = \frac{\sinh(x-y)}{\cosh x \cosh y}$

7. $\coth x + \coth y = \frac{\sinh(x+y)}{\sinh x \sinh y}$

8. $\coth x - \coth y = \frac{\sinh(y-x)}{\sinh x \sinh y}$

9. $\sinh x \sinh y = \frac{1}{2}[\cosh(x+y) - \cosh(x-y)]$

10. $\cosh x \cosh y = \frac{1}{2}[\cosh(x+y) + \cosh(x-y)]$

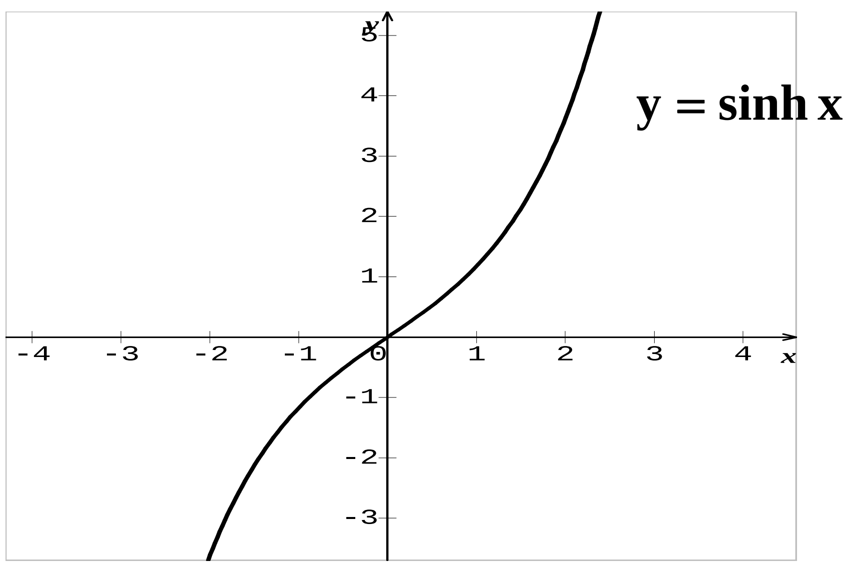
11. $\sinh x \cosh y = \frac{1}{2}[\sinh(x+y) + \sinh(x-y)]$

12. $\sinh y \cosh x = \frac{1}{2}[\sinh(x+y) - \sinh(x-y)]$

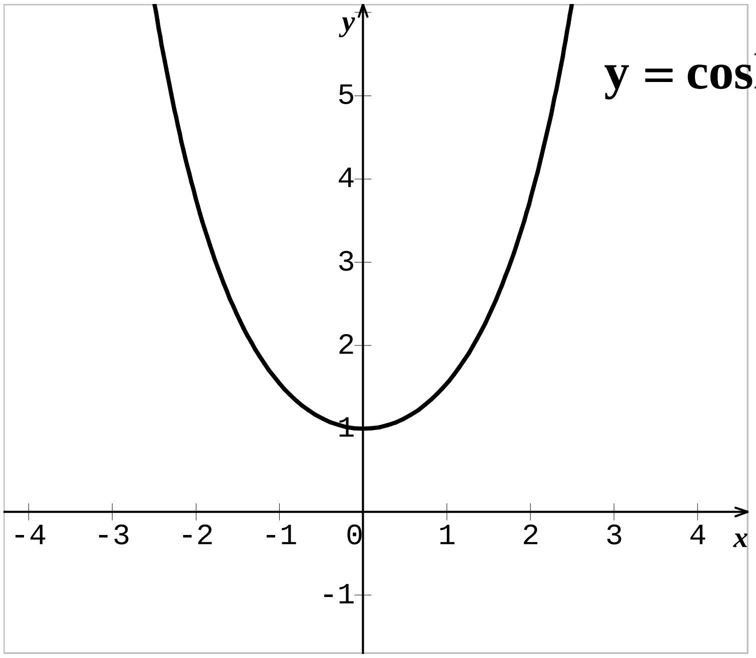
10.ក្រាបនៃអនុគមន៍អ៊ីពែបូលិក

(Graphs of Hyperbolic Functions)

1. $y = \sinh x$

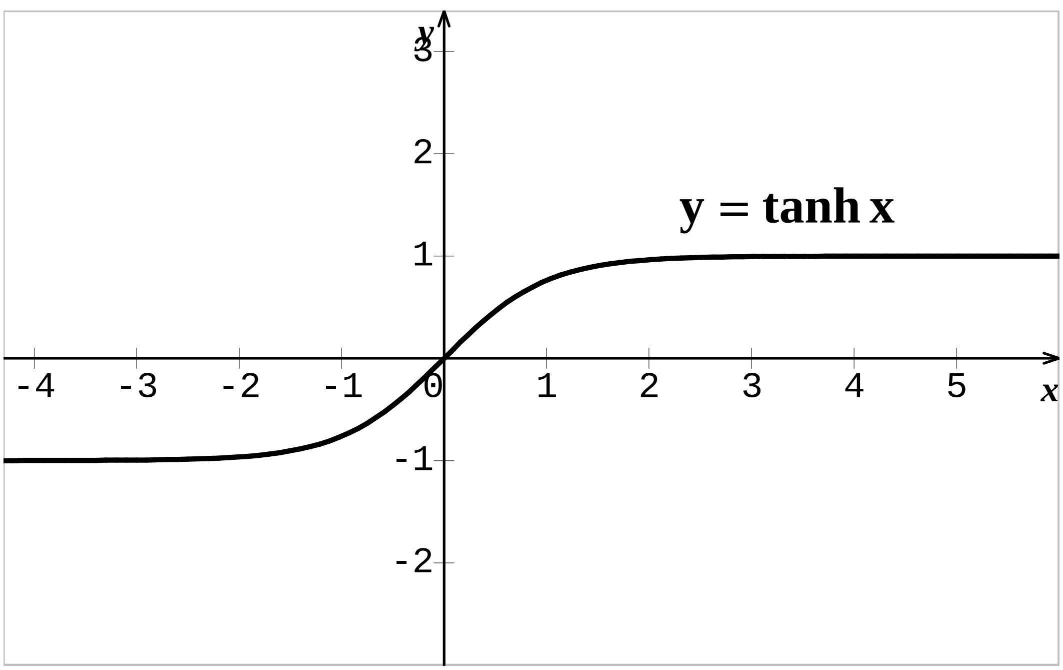


2. $y = \cosh x$

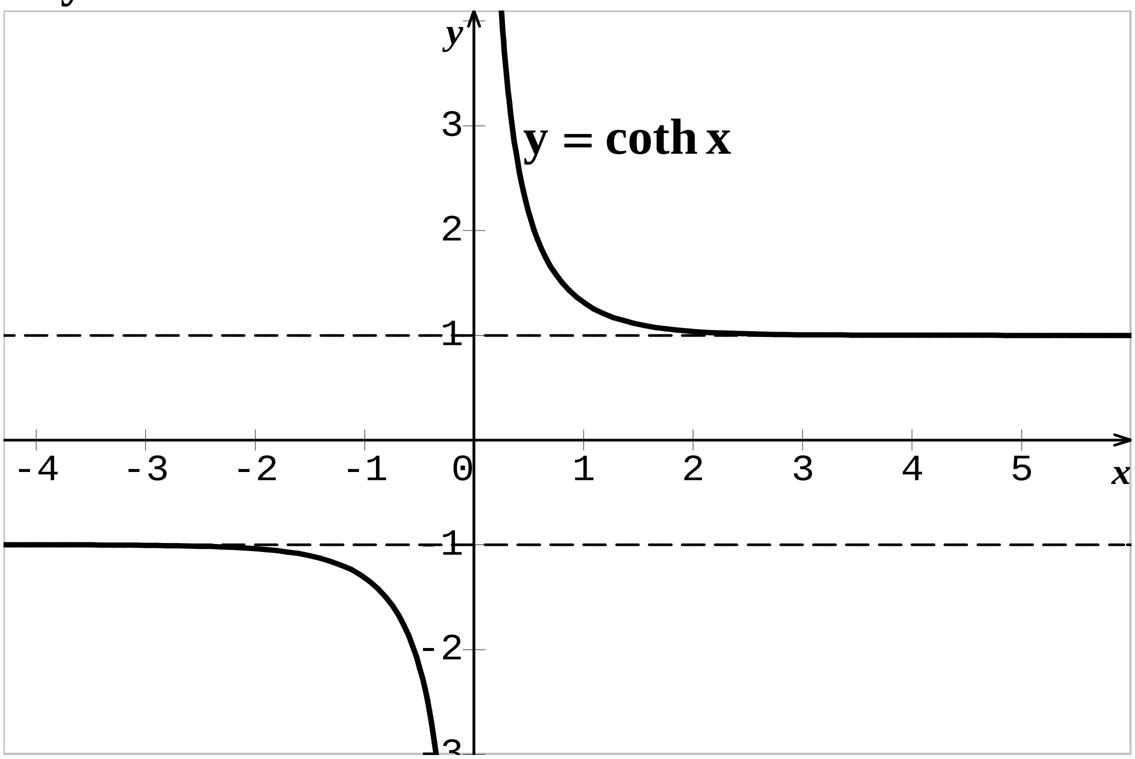


$y = \cosh x$

3. $y = \tanh x$



4. $y = \coth x$



11.ទំនាក់ទំនងរវាងអនុគមន៍អ៊ីពែបូលិកនិងអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ

(Relationships between Hyperbolic and Trigonometry Functions)

1. $\sin(ix) = i\sinh x$
2. $\cos(ix) = \cosh x$
3. $\tan(ix) = i\tanh x$
4. $\sinh(ix) = i\sin x$
5. $\cosh(ix) = \cos x$
6. $\tanh(ix) = i\tan x$

សម្រាយបញ្ជាក់

តាមរូបមន្តអឺលែ $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ និង $\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$

ជំនួស x ដោយ ix គេបាន ៖

$$\cos(ix) = \frac{e^{i(ix)} + e^{-i(ix)}}{2} = \frac{e^{-x} + e^{x}}{2} = \cosh x$$

$$\sin(ix) = \frac{e^{i(ix)} - e^{-i(ix)}}{2i} = \frac{e^{-x} - e^{x}}{2i} = i\frac{e^{x} - e^{-x}}{2} = i\sinh x$$

ហើយ $\tan(ix) = \frac{\sin(ix)}{\cos(ix)} = \frac{i\sinh x}{\cosh x} = i\tanh x$ ។

12.អនុវត្តន៍

គេមាន $\sinh(x+y) = \sinh x\cosh y + \sinh x\cosh y$

ជំនួស $x = ia$ និង $y = ib$ គេបាន ៖

$$\sinh i(a+b) = \sinh(ia)\cosh(ib) + \sinh(ib)\cos(ia)$$

ដោយ $\sinh i(a+b) = i\sin(a+b)$, $\sinh(ia) = i\sin a$

$\sinh(ib) = i\sin b$, $\cosh(ia) = \cos a$, $\cosh(ib)$

គេបាន $i\sin(a+b) = i\sin a\cos b + i\sin b\cos a$

ដូចនេះ $\sin(a+b) = \sin a\cos b + \sin b\cos a$ ។

គេមាន $\cosh(x+y) = \cosh x\cosh y + \sinh x\sinh y$

ជំនួស $x = ia$ និង $y = ib$ គេបាន :

$\cosh i(a+b) = \cosh(ia)\cosh(ib) + \sinh(ia)\sinh(ib)$

ដោយ $\cosh i(a+b) = \cos(a+b)$, $\sinh(ia) = i\sin a$

$\sinh(ib) = i\sin b$, $\cosh(ia) = \cos a$, $\cosh(ib)$

គេបាន $\cos(a+b) = \cos a\cos b + i^2\sin a\sin b$ ដោយ $i^2 = -1$

ដូចនេះ $\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$ ។

13.លីមីតនៃអនុគមន៍អ៊ីពែបូលិក

1. $\lim_{x\to 0}\frac{\sinh x}{x} = 1$

2. $\lim_{x\to 0}\frac{\tanh x}{x} = 1$

សម្រាយបញ្ជាក់

គេមាន $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = \dfrac{e^{2x} - 1}{2e^x}$

គេបាន $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sinh x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x} - 1}{2xe^x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x} - 1}{2x} . \dfrac{1}{e^x} = 1$ ។

14.ដេរីវេនៃអនុគមន៍អ៊ីពែបូលិក

1. $y = \sinh x \Rightarrow y' = \cosh x$

2. $y = \cosh x \Rightarrow y' = \sinh x$

3. $y = \tanh x \Rightarrow y' = \dfrac{1}{\cosh^2 x}$

4. $y = \coth x \Rightarrow y' = -\dfrac{1}{\sinh^2 x}$

15.អាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍អ៊ីពែបូលិក

1. $\int \sinh x.dx = \cosh x + c$ 3. $\int \tanh x.dx = \ln(\cosh x) + c$

2. $\int \cosh x.dx = \sinh x + c$ 4. $\int \coth x.dx = \ln(\sinh x) + c$

ជំពូកទី១៨

វិភាគបន្សំ និង ប្រូបាប៊ីលីតេ

I- វិភាគបន្សំ

១.ហ្វាក់តូរ្យែល (Factorial) :

ដែលហៅថាហ្វាក់តូរ្យែលនៃចំនួន **n** ជាផលគុណនៃ **n** ចំនួនគត់វិជ្ជមានដំបូង ឬ ជាផលគុណចំនួនគត់វិជ្ជមានតគ្នា ពី **1** រហូតដល់ **n** ដែលគេកំនត់សរសេរ :

$$\boxed{n! = 1\times 2\times 3\times ....\times n}$$ ។

២.តំរៀបមិនសារឡើងវិញ (Arrangement) :

តំរៀប **p** ធាតុក្នុងចំណោម **n** ធាតុនៃសំនុំ **E** គឺជាសំនុំរងនៃ **E** ដែលមាន **p** ធាតុខុសៗគ្នា

រៀបតាមលំដាប់មួយកំនត់ ។ គេកំនត់តាងចំនួនតំរៀប **p** ធាតុក្នុងចំនោម **n** ធាតុដោយ :

$$\boxed{A(n,p) = \frac{n!}{(n-p)!} = n(n-1)(n-2).....(n-p+1)}$$ ។

៣.ចំលាស់មិនសាឡើងវិញ (Permultation) :

ចំលាស់ **n** ធាតុខុសៗគ្នា គឺជាតំរៀប **n** ធាតុ ក្នុងចំណោម **n** ធាតុ ។

គេកំនត់ចំនួនចំលាស់ **n** ធាតុដោយ $\boxed{P = n! = 1\times 2\times 3\times .....\times n}$ ។

៤.បន្សំមិនសារឡើងវិញ (Combination) :

បន្សំ **p** ធាតុក្នុងចំណោម **n** ធាតុ ជាតំរៀបមិនគិតលំដាប់ដែលកំនត់ដោយ :

$$\boxed{C(n,p)=\frac{A(n,p)}{p!}=\frac{n!}{p!.(n-p)!}} \quad (n\geq p) \text{ ។}$$

៥.តំរៀបសារឡើងវិញ $\left(\text{Arrangement with Repetition}\right)$:

តំរៀបសារឡើងវិញ **p** ធាតុ ក្នុងចំណោម **n** ធាតុគឺជាតំរៀបដែលធាតុនីមួយៗ

អាចមានវត្តមាន **1,2,3,...,n** ដង ។

គេកំនត់សរសេរ : $\boxed{\overline{A(n,p)}=n^p}$ ។

៦.ចំលាស់សារឡើងវិញ (Permultation with Repetition) :

គេអោយសំនុំ **E** មាន **n** ធាតុ ដែលក្នុងនោះ n_1 ជាធាតុប្រភេទទី១ ,n_2 ជាធាតុប្រភេទទី២ ,n_3 ជាធាតុប្រភេទទី៣ ,.........,n_p ជាធាតុប្រភេទទី **p**

ដែល $n_1+n_2+n_3+....+n_p=n$

ចំនួនចំលាស់សារឡើងវិញនៃ **n** ធាតុ គឺជាចំលាស់អាចបែងចែកបានដែលកំនត់តាងដោយ :

$$\boxed{\overline{P}=\frac{n!}{n_1!.n_2!.n_3!.....n_p!}} \text{ ។}$$

៧.បន្សំសារឡើងវិញ (Combiation with Repetition) :

បន្សំសារឡើងវិញនៃ **p** ធាតុ ក្នុងចំនោម **n** ធាតុគឺជាបន្សំ ដែលធាតុនីមួយៗអាចមានវត្តមានច្រើនដង ។

គេតាងបន្សំសារឡើងវិញនៃ **p** ធាតុ ក្នុងចំនោម **n** ធាតុដោយ :

$$\boxed{\mathbf{C(n,p)=\frac{(n+p-1)!}{p!.(n-1)!}}}$$ ។

៨.ទ្វេធាញូតុន $\left(\text{Binom de Newton}\right)$

$$\boxed{\mathbf{(a+b)^n=C_n^0a^n+C_n^2a^{n-1}.b+C_n^2a^{n-2}.b^2+.......+C_n^nb^n}}$$ ។

ដែល $\mathbf{C_n^p=C(n,p)=\frac{n!}{p!(n-p)!}}$ ។

សំគាល់ : ទ្វេធាសំខាន់ៗគួរកត់សំគាល់

1. $\mathbf{(1+x)^n=C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+C_n^3x^3+..........+C_n^nx^n}$
2. $\mathbf{(x+1)^n=C_n^0x^n+C_n^1x^{n-1}+C_n^2x^{n-2}+.........+C_n^0}$

II-ប្រូបាប៊ីលីតេ

ប្រូបាប៊ីលីតេ មានសារៈសំខាន់ក្នុងជីវភាពប្រចាំថ្ងៃរបស់យើង ដែលយើងប្រើប្រាស់វាសំរាប់វាស់កំរិតនៃភាពមិនទៀងទាត់ ។ កាលណាយើងគ្រោងធ្វើអ្វីមួយកាលណាអ្នកឧតុនិយមទស្សន៍ទាយអាកាសធាតុឬ ក្រុមហ៊ុនធានារ៉ាប់រងធ្វើគោលនយោបាយរបស់ក្រុមហ៊ុន ចាំបាច់ត្រូវប្រើ ប្រូបាប៊ីលីតេ ដើម្បីធ្វើសេចក្តីសំរេចចិត្ត ឬធ្វើ ការជ្រើសរើស ។

១-ព្រឹត្តិការណ៍-លំហសំណាក :

ក.វិញ្ញាសា :

វិញ្ញាសា គឺជាការពិសោធន៏មួយដែល :

-អាចអោយគេដឹង នូវសំណុំលទ្ធផលដែលបានកើតឡើង

-ពុំអាចដឹងប្រាកដថា លទ្ធផលណាដែលនឹងកើតមានឡើង

-ការពិសោធន៏ អាចសារឡើងវិញ ជាច្រើនដង ក្នុងលក្ខខណ្ឌដូចគ្នា ។

ខ.សកល ឬលំហសំណាក :

សំនុំនៃលទ្ធផលទាំងអស់ដែលអាចមាន របស់វិញ្ញសាមួយ ហៅថា សកល ដែលគេតាងដោយ $\mathbf{S}$ ។

គ.ព្រឹត្តិការណ៍ : ជាសំណុំរង របស់សកល ឬលំហសំណាក ។

ឧទាហរណ៏ :

បើយើងបោះកាក់ដែលមានមុខ **H** និងខ្នង **T** ចំនួនមួយដងនោះគេអាចបានលទ្ធផល **H** ឬ **T** ។

-សំនុំ $\{\mathbf{H},\mathbf{T}\}$ ហៅថា លំហសំណាក តាងដោយ $\mathbf{S}=\{\mathbf{H},\mathbf{T}\}$ ។

-បើគេប្រាថ្នាបោះបានមុខ **H** នោះសំណុំ $\{\mathbf{H}\}$ ហៅថាព្រឹត្តិការណ៏ តាងដោយ $\mathbf{A}=\{\mathbf{H}\}$

-ចំនួនធាតុនៃលំហសំណាក ហៅថាចំនួនករណីអាច គេតាងដោយ $\mathbf{n(S)=2}$ ។

-ចំនួនធាតុនៃព្រឹត្តិការណ៏ ហៅថាចំនួនករណីស្រប គេតាងដោយ $\mathbf{n(A)=1}$ ។

២.រូបមន្តគោលនៃប្រូបាប :

នៅក្នុងពិសោធន៍មួយ ដែលមានលំហសំណាក **S** ប្រូបាប៊ីលីតេនៃព្រឹត្តិការណ៍ **A** កើតឡើងកំនត់ដោយ :

$$\boxed{\mathbf{P(A)} = \frac{\text{ចំនួនករណីស្រប}}{\text{ចំនួនករណីអាច}} = \frac{\mathbf{n(A)}}{\mathbf{n(S)}}}$$ ដោយ $\mathbf{A \subseteq S}$ នោះ $\mathbf{0 \le P(A) \le 1}$ ។

៣.រូបមន្តគណនាប្រូបាប៊ីលីតេ :

ក-រូបមន្ត ប្រូបាប៊ីលីតេនៃប្រជុំព្រឹត្តិការណ៍ពីរ

✳ បើ A និង B ជាព្រឹត្តិការណ៍ពីរមិនចុះសំរុងគ្នានោះគេបាន :

$$\boxed{\mathbf{P(A \cup B) = P(A) + P(B)}}$$

✳ បើ A និង B ជាព្រឹត្តិការណ៍ពីរសាមញ្ញនោះគេបាន :

$$\boxed{\mathbf{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}}$$

ខ-រូបមន្ត ប្រូបាប៊ីលីតេនៃប្រជុំព្រឹត្តិការណ៍បី :

✳ បើ A ,B និង C ជាព្រឹត្តិការណ៍បីមិនចុះសំរុងគ្នាពីៗនោះគេបាន :

$$\boxed{\mathbf{P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)}}$$

✳ បើ A និង B ជាព្រឹត្តិការណ៍បីសាមញ្ញនោះគេបាន :

$$\boxed{P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)}$$

គ-ជាទូទៅ :

✷ បើ $A_1, A_2, A_3, \ldots\ldots, A_n$ ជាព្រឹត្តិការណ៍មិនចុះសំរុងគ្នាពីៗនោះគេបាន :

$$\boxed{P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n)}$$ ។

ឃ-រូបមន្តប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ពីរផ្ទុយគ្នា :

បើ A និង $\overline{A}$ ជាព្រឹត្តិការណ៍ពីរផ្ទុយគ្នានោះគេបាន :

$$\boxed{P(A) + P(\overline{A}) = 1 \Leftrightarrow P(\overline{A}) = 1 - P(A)}$$ ។

ង-រូបមន្តប្រូបាប៊ីលីតេមានលក្ខខ័ណ្ឌ :

✷ ប្រូបាប៊ីលីតេនៃព្រឹត្តិការណ៍ A ដោយដឹងថា មានព្រឹត្តិការណ៍ B បានកើតឡើងរួចហើយ ហៅថា ប្រូបាបមានលក្ខខ័ណ្ឌ ដែលគេតាងដោយ $P(A/B)$ អានថាប្រូបាបនៃ A ដោយបានដឹង B ។

ដូចនេះ ចំពោះព្រឹត្តិការណ៍ A និង B ដោយ $P(B) \neq 0$ គេមានរូបមន្ត :

$$\boxed{P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}}$$ ឬគេអាចទាញ $$\boxed{P(A \cap B) = P(A/B) \times P(B)}$$

ច-រូបមន្តប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ពីរមិនទាក់ទងគ្នា :

✷ ព្រឹត្តិការណ៍ A និង B ដែលអាស្រយ័នឹងគ្នាក្នុងវិធីដែលការកើតឡើងនៃព្រឹត្តិការណ៍មួយមិនមានជាប់ពាក់ពន្ធ័នឹងការកើតឡើងនៃព្រឹត្តិការណ៍មួយទៀត យើងហៅថា ព្រឹត្តិការណ៍មិនទាក់ទងគ្នា ។

✷ បើ A និង B មិនទាក់ទងគ្នាសមមូល : $\left[\begin{array}{l} P(A/B) = P(A) \\ P(B/A) = P(B) \end{array}\right.$

✵ បើ A និង B ជាព្រឹត្តិការណ៍ មិនទាក់ទងគ្នានោះគេបាន :

$$\boxed{P(A\cap B)=P(A)\times P(B)}$$ ។

រៀបរៀងដោយ **លឹម ផល្គុន**

Tel : 017 768 246

Email:lim_phalkun@ymail.com

Website: www.mathtoday.wordpress.com

www.todaymath.blogspot.com